Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Facit
2024-01-17

1.

a)

Definition
Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ vara en uppsättning vektorer i $\Re^n$. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ sägs vara <u>linjärt oberoende</u> om $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ endast gäller om $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

b) t.ex. $(3,1,0,2) = (-1)(1,0,1,4) + 1 \cdot (4,1,1,6)$ men $(2,2,0,0)$ kan ej skrivas som en linjärkombination av de övriga. (för lösning utgå t.ex. från föreläsnings- lektions anteckningar… osv.)

Kommentar efter rättningen:

- Gissa inte lösningar!
- Ingenstans i definitionen pratas det om determinanter! Hänvisas till anteckningar med mera.
-

För att visa att vektorerna är linjärt oberoende utgå alltid från definitionen

$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ ger för givna vektorer följande:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}4\\1\\1\\6\end{pmatrix} = \vec{0}$$

.
.
.

parameterlösning fås:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

. Från lösningen framgår att vi har oändligt många lösningar

och detta innebär att vektorerna är linjärt beroende.

Vidare insättningar av respektive λ_i i ekvationen ger:

$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$ om $t \neq 0$, kan vi dividera varje

konstant framför vektorn med t, som ger

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Vi kan nu med hjälp av ekvationen ovan svara på vidare frågor i uppgiften. Omskrivningen ger:

$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alltså

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vidare ger omskrivningen på nyttt av följande

$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$ att

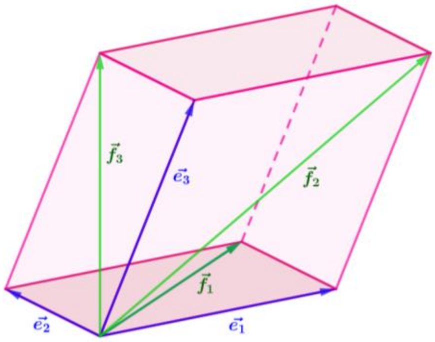
$0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ger oss inte vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ som linjär

kombination av de övriga, observera att vi inte kan dividera koefficienter i båda leden med 0! Denna opration är ju odefinerad!
Viktigt att tänka på att vektorerna inte divideras med ett tal bara koefficienterna framför! Hänvisas till teorin, räknelagar, anteckningar med mera.

2.

$\vec{u}$:s koordinater i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ är $(3, -1,\ 0)$.

Tips:



Från bilden fås direkt följande samband:

$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{f}_1$

$\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = \vec{f}_2$

$\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{f}_3$ …fortsätt vidare med $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ där $X_f = P^{-1} X_e$.

Kommentar efter rättningen:

Ingenstans i uppgiften nämns det att parallellepipeden är en kub! Du kan alltså inte anta att vektorerna som spänner upp parallellepipeden är enhetsvektorer som är sinsemellan ortogonala!

3.

a) Precis en lösning för alla a, utom $a = -3, a = 1$ och $a = 2$.
Om $a = -3$ eller $a = 1$ så saknas lösning.

b) $a = 2$, linjens ekvation ges av L: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \epsilon \mathcal{R}$.

Kommentar efter rättningen:

Du behöver relatera till given teori! Existensen av lösningar till linjära ekvationssystem.
Vad frågas om i b?

4.

$$A_f = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ där } \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}.$$

Kommentar efter rättningen:

Du hittar den fullständiga lösningen med kommentarer bland dina anteckningar. Teorin är som alltid av stort intresse.

5.

$L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ där $t \epsilon \mathcal{R}$. Ledning: L_2 måste ligga i det plan som innehåller $(4, 0, -1)$ och är parallellt med Π.

Kommentar efter rättningen:

Följ ledningen som ger det plan i vilket L_2 ligger.
Planets ekvation är blir $\Pi_2: \ -2y + 3z = 1$.

$L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ skär Π_2 i punkten Q som tillsammans med given punkt på L_2 ger riktningsvektorn för den sökta linjen.

6.

Svar med kort lösningsskiss:

Observera att $\vec{f}_1$ är parallelle med linjen medan $\vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ är ortogonala mot densamma. Därför fås spegelbilderna $G(\vec{f}_1) = \vec{f}_1, G(\vec{f}_2) = -\vec{f}_2$ och $G(\vec{f}_3) = -\vec{f}_3$. Avbildningsmatrisen i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ är

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ och}$$

transformationsmatrisen för basbytet (basbytesmatrisen) är $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Avbildningsmatrisen i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ är $A_e = PA_fP^{-1} = PA_fP^t = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

$G(\vec{e}_1 + \vec{f}_1) = G(\vec{e}_1) + G(\vec{f}_1) =$ (första kolonnen i respektive avbildningsmatris ger) $=$

$$= \frac{1}{9}\left(-\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3\right) + \vec{f}_1 = \frac{1}{9}(-\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3) + \frac{1}{3}\left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = \ldots = \frac{1}{9}(5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 14\vec{e}_3)$$

Så koordinatmatrisen i ursprungsbasen är $G(\vec{e}_1 + \vec{f}_1)_e = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -14 \end{bmatrix}$.

Kommentar efter rättningen:

Du måste följa teorin här. En specifik lösning förväntas. Du måste använda dig av given data. Lösningen relaterar till den teorin där vi pratade om införandet av en ny ”smart” bas som passar geometrin. Många exempel gjordes noggrant på tavlan och du hittar de bland dina anteckningar bland annat.
I uppgiften har du redan fått en ”super smart bas” så du behöver inte leta efter den 😊 dock måste du känna till teorin och fortsätta vidare bara.