

## Tentamen i Linjär algebra 2019-03-25 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg *G* räcker 8 poäng, för betyg *VG* räcker 14 poäng. Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2019-02-13. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara och avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.

En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

**OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.**

Följ föreläsning och lektions anteckningar! inga "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

1. Skärningslinjen mellan planen  $x - 2y + z - 1 = 0$  och  $2x - y + z - 2 = 0$  går inte genom punkten  $(4, -3, 0)$ . Hur långt ifrån punkten ligger linjen?

2. Bestäm minstakvadratlösningen till

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Ange ortogonalprojektionen av  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  på planet (genom origo) som spänns av  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

3.  $\vec{f}_1 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ ,  $\vec{f}_2 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$  och  $\vec{f}_3 = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ .
- a) Visa att  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  är en bas för rummet samt bestäm basbytesmatrisen P för basbytet.
- b) Om  $\vec{v}$  har koordinaterna  $(3, 7, 2)$  i basen  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ , vad är dess koordinater i basen  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .
- c) Vilka koordinater har vektor  $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2$  i basen  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ?

4. För vilka reella värden på  $a$  har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + (a+1)z = 0 \\ 2x - y + az = 3 - a \\ x + (a+2)y + (2a+3)z = 2a+1 \end{cases}$$

- a) exakt en lösning?  
b) oändlig många lösningar, vilken är denna lösning?  
c) ingen lösning
5. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som definieras av att varje vektor  $\vec{u}$  i rummet avbildas på sin ortogonala projektion på planet  $x - y = 0$  och därefter speglas i origo.
6. Rita och beskriv kurvan  $Q(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$  så tydligt som möjligt. Bestäm även de punkter  $(x_1, x_2)$  på kurvan som ligger närmast origo.