Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2019-08-23 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2019-02-13. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

1. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm alla vektorer som har längd 3 och som är ortogonala mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

2. De fyra planen Π_1, Π_2, Π_3 och Π_4 är givna av följande ekvationer:

$$\Pi_1: \quad x + 2y + 3z = 6$$

$$\Pi_2: \quad 2x - y + z = -3$$

$$\Pi_3: \quad 4x + 3z = 2$$

$$\Pi_4: \quad x - y - 2z = -8$$

   Planen Π_1, Π_2 och Π_3 skär varandra i en punkt. Bestäm det kortaste avståndet från denna punkt till planet Π_4.

3. Låt $\underline{e} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ vara en bas i ett linjärt rum L. Vi inför en ny bas $\underline{f} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ i L definierad genom sambandet

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

   Vektorn $\vec{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\,\overrightarrow{e_3}$.
   Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{u}$ i basen $\underline{f} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$.

4. Bestäm den vridningsmatris (vridning omkring origo) som överför vektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ på vektorn $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Beräkna matrisen till den ortogonala projektionen P på planet som går igenom punkterna $(2, 0, -2), (2, 1, -3)$ och $(1, 2, -3)$. Låt D vara kvadraten som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 0)$. Under projektionen avbildas kvadraten på en parallellogram. Vad är dess area?

6. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till den linjära avbildningen $F : \Re^3 \to \Re^3$ som i standardbasen representeras av

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ge även en tydlig geometrisk tolkning av avbildningen.

lycka till !