Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2020-08-24 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker **8** poäng, för betyg VG räcker **14** poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2020-02-13. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

1. Avbildningen F har matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

   Vilka av vektorerna $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ och $\vec{w} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

   är egenvektorer till F? Bestäm vektorernas egenvärden i förekommande fall. Förklara utförligt din tankegång.

2. För vilka värden på konstanten b, som ekvationssystemet nedan har en enda lösning, oändligt många lösningar eller inga lösningar alls?

$$\begin{cases} 2x + (1-b)y + 2z = b+1 \\ (2+b)x - y + z = b \\ (2+2b)x - y + (1+b)z = b-1 \end{cases}$$

   Förklara utförligt din tankegång.

3. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektion på den räta linje som går genom punkterna $(0,0,0)$ och $(-2,1,-3)$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Föreslå en lämplig kontroll av avbildningsmatrisen, och utför denna. Rita figur! Förklara utförligt din tankegång.

4. Finns det matriser X och Y som uppfyller systemet av matrisekvationer

$$\begin{cases} XA + YB = I \\ X + Y = 2I \end{cases}$$

   , där I betecknar identitesmatrisen och

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Förklara utförligt din tankegång.

5. Låt G och H vara linjära avbildningar $\Re^2 \to \Re^2$. Uttryckt i standardkoordinater (x, y) för planet så beskriver G spegling i x-axeln och H spegling i linjen $x = y$. Visa att den sammansatta avbildningen $F = G \circ H$ (så att $F(\vec{v}) = G(H(\vec{v}))$) beskriver en vridning i planet. Hur stor är vridningsvinkeln? Förklara utförligt din tankegång.

6. Tre linjärt oberoende vektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ i rummet är givna. Definiera för varje reellt tal a, en vektor $\vec{w}_a = \vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + a^2\vec{u}_3$. Visa att $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ är linjärt oberoende, och alltså en bas. Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2 + 100\vec{u}_3$ i basen $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Förklara utförligt din tankegång.

lycka till !