

## Tentamen i Linjär algebra 2021-04-23 kl 14-19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg *G* räcker 8 poäng, för betyg *VG* räcker 14 poäng. Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2020-02-15. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.

En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

**OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.**

Följ föreläsning och lektions anteckningar! inga "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas  $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  för planet eller  $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  för rummet.

1. Låt  $\Pi$  vara planet  $x - 2y + 3z = 5$  och låt, för en given konstant  $a$ ,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Dela upp

$\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel$  där  $\vec{u}_\perp$  är ortogonal mot planet  $\Pi$  och  $\vec{u}_\parallel$  är parallell med planet  $\Pi$ . Vad innebär specialfallet  $a = 1$  geometriskt?

2. Lös matrisekvationen

$$3X + 2B - A^{-1}X = AX$$

$$\text{där } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Planet  $\Pi: x - y + 3z = 3$  skär planet  $\Pi_1: x + y + z = 1$  längs linjen  $l_1$  och planet  $\Pi_2: x + y + z = 3$  längs linjen  $l_2$ . Bestäm avståndet mellan linjerna  $l_1$  och  $l_2$ .
4. Bestäm en ny ON-bas  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  för rummet, sådant att vektor  $\vec{f}_1$  är parallell med skärningslinjen mellan planen  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  och  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ , och vektorn  $\vec{f}_2$  är ortogonal mot planet  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Ange därefter koordinaterna för normalvektor till planet  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$  i den nya basen.

5. Låt  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

a) Bestäm  $A^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Kontrollera ditt svar. (2p)

b) Bestäm en matris  $X$  sådan att  $X^2 = A$  (1p)

6.  $R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  är avbildningsmatrisen för rotationen.

a) Bestäm rotationsaxeln. (1p)

b) Bestäm rotationsvinkeln. (2p)