Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2022-04-22 kl 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2022-02-14. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **Inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1.
   a. Vad betyder att en mängd vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ är linjärt oberoende?
   b. Avgör om vektorerna $(1,2,3,4)$, $(1,1,1,1)$ och $(0,1,0,1)$ i $\Re^4$ är linjärt beroende eller oberoende. (2p)

2. Undersök om det finns någon matris X sådan att

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

samt bestäm i så fall matrisen X.

3. Två linjer $l_1 : (x,\ y,\ z) = (1-2t,\ 2+3t,\ 3+t)$ och $l_2 : (x,\ y,\ z) = (-7+s,\ 3+3s,\ 9+s)$ projiceras ortogonalt på planet $x - y - z = 3$. Ange skärningsvinkeln mellan de projicerade linjerna. Utgå från tydliga figurer med tydliga beteckningar. Motivera noga.

4.
   a. Definiera vad som menas med att $\vec{u}$ är egenvektor till F med egenvärde λ.
   b. Den linjära avbildningen F på rummet uppfyller

$$\begin{cases} F(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

Avgör utan att bestämma F : s avbildningsmatris, alltså med hjälp av definitionen i a. vilka av vektorerna $\vec{u} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ och $\vec{w} = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$ som är egenvektorer till F och bestäm i förekommande fall motsvarande egenvärden. Motivera noga.

5. En romb är en parallellogram där alla sidor är lika långa. Visa att diagonalerna i en romb alltid är ortogonala. Beräkna också arean av en romb med sidlängd s, om även en av diagonalerna har längd s. Utgå från en figur med tydliga beteckningar. Förklara utförligt din tankegång.

6. Antag att F är en spegling i ett plan genom origo och att man vet att F avbildar vektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestäm F : s matris A i den givna basen. Beräkna också $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

Förklara utförligt din tankegång.

lycka till !