Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2022-08-22 kl 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2022-02-14. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **Inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1. Bestäm avståndet mellan de båda linjerna

$$l_1: \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = -3 - s \\ z = \quad s \end{cases}, \ s \in \Re \quad \text{och} \quad l_2: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + t \end{cases}, \ t \in \Re \quad \text{. Motivera noga!}$$

2. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som innebär att varje vektor i rummet avbildas på sin ortogonala projektion på linjen $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$. Kontrollera att en vektor parallell med linjen och att två ej parallella vektorer ortogonala mot linjen avbildas som avsett. Utgå från en figur med tydliga beteckningar. Motivera noga!

3. Låt $A = A(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{bmatrix}$. Visa att $det(A)$ är oberoende av x. Det visar sig att för ett visst x blir inversen till A lika med $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$. Vilket x då. Motivera noga!

4. Antag att $A = (a_{ij})$ är en $n \times n$ - matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Summan av diagonalelementen, dvs. $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ brukar kallas *spåret* till A och betecknas $sp(A)$ (eller $Tr(A)$). Man kan visa att spåret är lika med summan av egenvärdena dvs. att

$$sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n .$$

(Vilket ibland kan vara bra att veta för att kontrollera räkningarna.)

   a. Illustrera riktigheten av $sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ genom att beräkna båda leden då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. Bestäm alla egenvektorer till matrisen A.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

5. Bestäm det andragradspolynom $y = ax^2 + bx + c$ som, i minsta-kvadratmening bäst ansluter till värdena i nedanstående tabell:

x	-2	-1	1	2
y	-6	0	8	17

6. Beskriv och rita kurvan $Q(x, y) = 1$ om $Q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$.

lycka till !