Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2023-03-24 kl 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2023-02-13. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1. Undersök antalet lösningar till $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + 2y + az = 2 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$

   för olika värden på a. Lös ekvationssystemet för de a som ger mer än en lösning.

2. Undersök om det finns någon vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ så att vektorerna $A\vec{x}$ och $\vec{x}$ är parallella,

   där $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

   a) Visa att systemet saknar lösning.
   b) Bestäm systemets minstakvadratlösning. Om $A\vec{x} = \vec{b}$ är systemet skrivet i matrisform, beräkna det minimala värdet av $\left|A\vec{x} - \vec{b}\right|$.
   c) Kontrollera att $A\vec{x}$ är ortogonal mot $A\vec{x} - \vec{b}$.

4. Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för den linjära avbildningen som speglar vektorer i planet $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$. Din lösning skall göras genom att välja en ny bas $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ som passar geometrin.

5. Bestäm en ON- matris P och en diagonalmatris D så att $P^t AP = D$ då $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Sammansättningen $G \circ F$ är en spegling. Bestäm konstanten k så att $G(F(\vec{u}))$ är spegelbilden av $\vec{u}$ i linjen $y = kx$, för alla $\vec{u} \in V$ där matrisen för sammansättningen $G \circ F$ ges av följande:

   Låt V vara mängden av vektorer i planet, låt F vara den linjära avbildning på V som speglar en vektor i linjen $x - 2y = 0$ och låt G vara den linjära avbildning på V som roterar en vektor vinkeln $\frac{\pi}{2}$ (i positiv riktning, moturs).

lycka till !