Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2023-04-21 kl 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2023-02-13. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1. Lös ekvationen $AX = B$ om $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finn $\vec{v}$ och $\vec{w}$ så att $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v}$ är parallell med $\vec{r}$ och $\vec{w}$ är vinkelrät mot $\vec{r}$. Hitta också en vektor $\vec{x}$ som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{r}$.

3. Låt den linjära avbildningen F ha matrisen $A_e = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Ange en bas $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ för rummet bestående av egenvektorer till F. Bestäm också F:s matris A_f i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$.

4. Hitta ekvationen för den linje L som går genom punkten $P = (2, -3, 1)$ och är vinkelrät mot planet Π: $x + y - 2z = 2$. Ange också avståndet från P till detta plan.

5. Låt F vara den linjär avbildning som projicerar varje vektor i rummet ortogonalt på ett plan Π genom origo. Antag vidare att F avbildar vektorn $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ på vektorn $F(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm en ekvation för Π samt F : s avbildningsmatris A i den givna basen.

6. I triangeln ABC är D den punkt på sidan AB för vilken $|BD| = 4|AD|$, och E är den punkt på sidan BC för vilken $|CE| = 4|BE|$. Låt F vara skärningspunkten mellan DE och medianen från B. Sätt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ och $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Uttryck $\overrightarrow{BE}$ och $\overrightarrow{BF}$ i $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Visa också att triangeln BEF alltid upptar samma andel av triangeln ABC:s area, och ange denna andel.

   Obs: median är en linje från ett hörn i en triangel till den motstående sidans mittpunkt.

lycka till !