Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01+764G08
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2024-01-17 kl 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng. Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2023-10-23. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01+764G08
Modul: TEN1

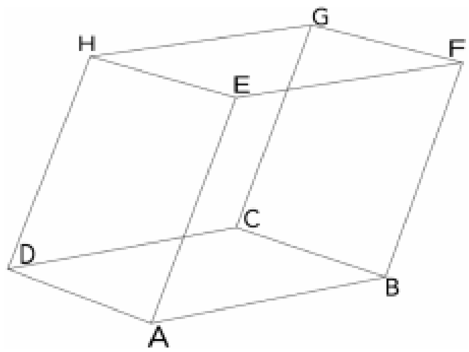
Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1.

a. Vad betyder att en mängd vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$är linjärt oberoende?

b. Visa att vektorerna $(1,0,1,4)$, $(2,2,0,0)$, $(3,1,0,2)$ och $(4,1,1,6)$i $\Re^4$ är linjärt beroende. Skriv $(3,1,0,2)$ som en linjärkombination av de övriga.
Kan $(2,2,0,0)$ skrivas som en linjärkombination av de övriga? (2p)

2. I parallellepipeden med hörn i A, B, C, D, E, F, G, (se figur) utgör $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ en bas och $\vec{f}_1 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{AF}$, $\vec{f}_3 = \overrightarrow{AH}$ en annan. Om vektorn $\vec{u}$ har koordinater $(2,\ 3, -1)$ med avseende på basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, vilka koordinater har $\vec{u}$ med avseende på basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$? Förklara utförligt din tankegång.



3. **a.** För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

precis en lösning, ingen lösningar resp. oändligt många lösningar ? (2p)

b. De tre ekvationerna i systemet kan uppfattas som ekvationerna för tre plan. För vilka värden på a skär de tre planen varandra längs en rät linje? Bestäm linjens ekvation.

4. Låt den linjära avbildningen F ha matrisen $A_e = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
Ange om möjligt en ON-bas $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ för rummet bestående av egenvektorer till F. Bestäm också F:s matris A_f i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$.

vänd →

5. Låt Π: $x - 2y + 3z = 4$ och L_1 vara linjen $x - 2 = 3y - 6 = 5 - z$. Bestäm en ekvation för den linje L_2 som är parallell med Π , skär L_1 och innehåller punkten $(4, 0, -1)$.

6. Den linjära avbildningen G på rummet ges av spegling i linjen som har ekvationen

   $(x, y, z) = t(2,1,-2)$.

   Inför en ny ON-bas $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ för rummet enligt $\vec{f}_1 = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$,

   $\vec{f}_2 = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$ och $\vec{f}_3 = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

   Bestäm G:s avbildningsmatriser i båda baserna. Beräkna också koordinaterna för vektorn $G(\vec{e}_1 + \vec{f}_1)$ i ursprungsbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Förklara utförligt din tankegång.

lycka till !