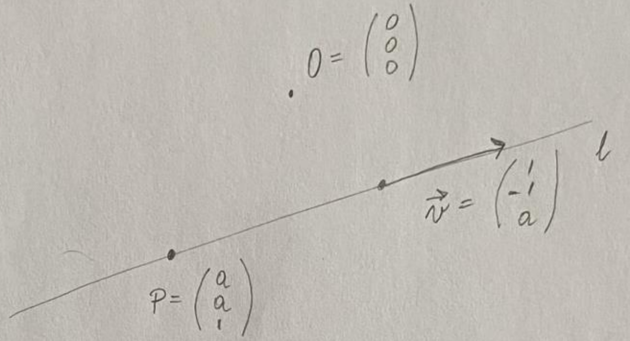
1.107 B Bestäm konstanten a så att linjen $x = a+t,\ y = a-t,\ z = 1+at$ får så litet avstånd från origo som möjligt. Bestäm detta minsta avstånd.

Lösning:

- l ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

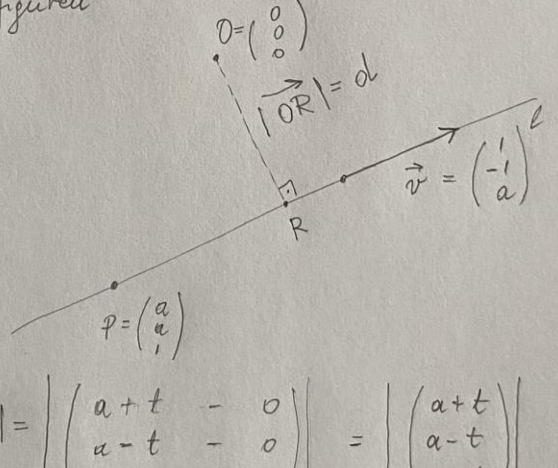
- Rita figur!



- OBS! origo ligger ej på linjen, ty $\begin{cases} t = -a \\ t = a \\ ta = -1 \end{cases}$, motsägelse!

(obs: att ekvation 1) och 2) har en lösning om $a=0$, men för a lika med 0 i ekv. 3 kommer inte att vara def.!!!)

- Vi jobbar med figuren



- avståndet $= d = |\overrightarrow{OR}| = \left|\begin{pmatrix} a+t & - & 0 \\ a-t & - & 0 \\ 1+at & - & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a+t \\ a-t \\ 1+at \end{pmatrix}\right|$

O:s koordinater

R:s koordinater

- vi behöver söka t, från figuren $\overrightarrow{OR} \bullet \vec{v} = 0$

$\overrightarrow{OR} \bullet \vec{v} = 0$ ger

$$\begin{pmatrix} a+t \\ a-t \\ 1+at \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} = 0$$

$$\cancel{a}+t-\cancel{a}+t+a+a^2t=0$$

$$2t+a+a^2t=0$$

$$t(2+a^2)=-a$$

$$\boxed{t = \frac{-a}{2+a^2}}$$

OBS! $2+a^2 \geq 2$, alltså inga problem med division!

för $t = \dfrac{-a}{2+a^2}$ blir $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} a - \dfrac{a}{2+a^2} \\ a + \dfrac{a}{2+a^2} \\ 1 - \dfrac{a^2}{2+a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a+a^3-a}{2+a^2} \\ (2a+a^3+a)/(2+a^2) \\ \dfrac{2+\cancel{a^2}-\cancel{a^2}}{2+a^2} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} a+a^3 \\ 3a+a^3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} a(1+a^2) \\ a(3+a^2) \\ 2 \end{pmatrix}$$

ger $d = |\overrightarrow{OR}| = \left| \dfrac{1}{2+a^2}\begin{pmatrix} a(1+a^2) \\ a(3+a^2) \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \dfrac{1}{2+a^2}\sqrt{a^2(1+a^2)^2 + a^2(3+a^2)^2 + 4}$

Vi söker minsta avståndet. Avståndet är minst då <u>täljaren</u> är som minst hos oss ty vi vet redan att $2+a^2 \geq 2$.

Täljaren är som minst om $a^2(1+a^2)^2 + a^2(3+a^2)^2+4$ är som minst.

Vi vet att $\begin{cases} a^2(1+a^2)^2 \geq 0 \\ a^2(3+a^2)^2 \geq 0 \end{cases}$ alltså $a^2(1+a^2)^2 + a^2(3+a^2)^2+4 \geq 4$ och är

som minst då $a^2(1+a^2)^2=0$ och $a^2(3+a^2)^2=0$ alltså då $\underline{\underline{a=0}}$

För a lika med noll blir

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{2}{2} = 1$$

<u>Svar</u>: Minsta avståndet är 1 l.e.