$\boxed{1.40P}$ Bestäm skärningspunkten mellan planet $3x - y + z = 2$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Kontrollera att den funna punkten ligger både i planet och på linjen.

Lösning:

Om skärningspunkten finns så måste följande system ha en lösning:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \underset{\text{"ekvivalent med"}}{\overset{\Leftrightarrow}{\uparrow}} \quad \begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$$

insättning av respektive x, y och z i ekvation 1 ger

$$3(1+2t) - (-t) + 1 = 2$$
$$3 + 6t + t + 1 = 2$$
$$7t = -2$$
$$t = -\frac{2}{7}$$

$\boxed{\text{Var noga med Notationen!}}$

Alltså för $t = -\frac{2}{7}$ finns det en skärningspunkt. Insättning av $t = -\frac{2}{7}$ i x, y, z (eller linjens ekvation ger sökta punkten).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{7}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ger } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

koordinaterna för en punkt på linjen då $t = -\frac{2}{7}$ alltså för skärningspunkten

OBS! Varje parantes är av betydelse!

Svar: Skärningspunktens koordinater är $(3/7, 2/7, 1)$.

avsluta ALLTID med ett svar efter ordet svar:

ingår i lösningen!

Kontroll: ligger $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix}$ i π? $VL = 3x - y + z = \begin{bmatrix} x = 3/7 \\ y = 2/7 \\ z = 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \frac{3}{7} - \frac{2}{7} + \frac{7}{7} = \frac{9}{7} - \frac{2}{7} + \frac{7}{7} = \frac{14}{7} = 2$

$HL = 2$

Alltså $HL = VL$ och detta innebär att punkten ligger i π.

OBS: Du behöver redovisa precis så med alla kommentarer

Kontroll: om punkten ligger på linjen.

ingår i lösningen

om punkten linjen på linjen så uppfyller den även linjens ekvation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

sätt i skärningspunktens koordinater $(3/7, 2/7, 1)$, som ger

$$\begin{pmatrix} 3/7 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som ger ekvationssystemet med tre ekvationer och en variabel, t.

$$\begin{cases} 3/7 = 1 + 2t \\ 2/7 = -t \\ 1 = 1 \end{cases}$$

ekvationen är sann! inga problem!

$$\begin{cases} 3/7 - 1 = 2t \\ -2/7 = t \\ 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3-7}{7} = 2t \\ t = -2/7 \\ 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{4}{7} = 2t \\ t = -2/7 \\ 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{2}{7} \\ t = -\frac{2}{7} \\ 1 = 1 \end{cases}$$

(kommentar: ekvation 1 och ekvation 2 ger oss samma t värde! och ekvation 3 är sann!)

Alltså punkten $(3/7, 2/7, 1)$ ligger på linjen.