3.7.

$$\begin{cases} F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ F(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ F(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1° Bestäm F:s avbildningsmatris A i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Lösning:

Vi söker $A = \begin{bmatrix} F(\vec{e}_1) & F(\vec{e}_2) & F(\vec{e}_3) \end{bmatrix}$.

- Linearitetsegenskaperna ger:

$$\begin{cases} 1) & F(\vec{e}_1) + F(\vec{e}_2) + 2F(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ 2) & F(\vec{e}_2) + F(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ 3) & F(\vec{e}_2) - F(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

- ekv 2 + ekv 3 ger $2F(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ alltså $F(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$
- sätt $F(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ i ekv 2) som ger $\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + F(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$
  alltså $F(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
- sätt $F(\vec{e}_2)$ och $F(\vec{e}_3)$ i ekv 1) som ger

$$F(\vec{e}_1) + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$ som

ger till slut (övning)

$$F(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 .$$

- Alltså $F(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

  $F(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ –"– ——

  $F(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 = 4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix}$ –"– ——

- Insättning av respektive i A ger:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- kontroll av t.ex. ekvation 1) $VL = F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = A \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+0-2\\2+1-2\\-7+2+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$

  $HL = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$

  $VL = HL \Rightarrow A$ uppfyller ekv. 1)

2

Kontrollera nu ekv2 och ekv3 på samma sätt som kontroll för ekv. 1) (övning!)

3 Beräkna också $F(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$.

Kommentar: Du ska ha nytta av kontrollberäkningar innan! på hur man tar fram bilden av en vektor mha avbildningsmatrisen för avbildningen F.

Du vet att $\boxed{F(\vec{u}) = A\cdot\vec{u}}$

Då blir $F(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = F\left(2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$

och vidare $F\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \underset{\text{matris}}{A}\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ ← kolonnmatris (kantiga parenteser!)

$$F\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -7 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\cdot 2 + 0 - 1\cdot 2\\ 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\\ -7\cdot 2 + 2(-1) + 1\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\1\\-14\end{bmatrix} = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 14\vec{e}_3$$

Svar: $A = \begin{bmatrix}4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -7 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$F(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 14\vec{e}_3$

Alternativ lösning till (Beräkna också $F(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$).

$$F(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = \left[\text{linearitetsegenskaperna ger}\right] = 2F(\vec{e}_1) - F(\vec{e}_2) + 2F(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix}\text{från tidigare:}\\ F(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3\\ F(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\\ F(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\end{bmatrix} =$$

måste kommenteras!

$$= 2(4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3) - (\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) + 2(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = [\ldots\ \text{övning}] = 6\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 14\vec{e}_3.$$

OBS! även kontrollen kan göras på samma sätt, utan att behöva använda A