6.14

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = -1 \\ ax - 2y \quad = -1 \end{cases} \quad ; \quad \text{matrisform} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

teori: Sats: (Fö8)

Ett linjärt ekvationssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ med lika många ekvationer som obekanta har exakt en lösning om $\det A \neq 0$. Om $\det A = 0$ så har systemet antingen ingen lösning alls eller så har det oändligt många lösningar.

Kommentar: Hos oss representerar varje ekvation ett plan. Då tolkar vi att om $\det A \neq 0$ så hittar vi exakt en lösning som ger skärningspunkten och om $\det A = 0$ så antingen finns det ingen skärningspunkt eller mer än en skärningspunkt (en skärningslinjens ekvation).

Lösning:

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 8 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = \big/ r2 - 2 \cdot r1 \big/ = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a-4 & 8-2a \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a-4 & -2(a-4) \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= (a-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix} = (a-4)\left(0 + 0 - 4a - a^2 - 4 - 0\right) = (a-4)(-a^2 - 4a - 4) =$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= -(a-4)(a^2+4a+4) = (4-a)\underbrace{(a^2+4a+4)}_{\substack{\text{kvadreringsregeln} \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}} = (4-a)(a+2)^2$$

- $\det A = 0$ om $(4-a)(a+2)^2 = 0$ alltså om $4 - a = 0$ eller $a + 2 = 0$
  som ger att $\det A = 0$ för ($a = 4$ eller $a = -2$) och $\det A \neq 0$ om ($a \neq 4$ och $a \neq -2$)

  OBS! betydelsen av givna ord

- Här kan vi redan konstatera att för $a \neq 4$ och $a \neq -2$ har planen exakt en skärningspunkt.

- Nu gäller det att undersöka vad vi får om $a = 4$ eller $a = -2$.

• för $a=4$ får vi följande ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ som ger den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim /\text{ekv } 2 - 2 \cdot \text{ekv } 1/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right), \Rightarrow \underline{0=-3}$$ som är motsägelse!

Detta medför att för $a=4$ saknar systemet lösning, alltså för $a=4$ har planen ingen skärningspunkt.

• för $a=-2$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left/ \begin{array}{l} \text{ekv } 2 - 2 \cdot \text{ekv } 1 \\ \text{ekv } 3 + 2 \cdot \text{ekv } 1 \end{array} \right/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim /\text{rad } 2/3/ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim /\text{ekv } 3 + \text{ekv } 2/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim /\text{ekv}1 + \text{ekv } 2/ \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2z = 0 \text{ som ger } x = -2z \\ \Rightarrow -2y + 4z = -1 \quad - \text{"} - \quad y = \frac{1}{2} + 2z \end{array}, \text{ låt } z = t,\ t \in \mathbb{R}$$

Alltså $\begin{cases} x = -2z \\ y = \frac{1}{2} + 2z \\ z = z \end{cases}$ och för $z=t$, där $t \in \mathbb{R}$ blir lösningen

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{1}{2} + 2t \\ z = t \end{cases}$$ eller tydligare $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

som ger ekvationen för skärningslinjen mellan de 3:i givna planen, en linje given i parameterform, linjen går genom punkten $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och har riktningsvektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, där varje val av t ger respektive punkt på skärningslinjen, obs. varje sådan punkt då $a=-2$, uppfyller ekvationssystemet.

<u>svar</u>: Då $a \neq 4$ och $a \neq -2$ har vi exakt en skärningspunkt.
Då $a=4$ har vi ingen skärningspunkt.
Då $a=-2$ har mer än en skärningspunkt, en linje, med ekv. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \in \mathbb{R}$

måste alltid anges

Observera att om du sökte lösningar till systemet för $a \neq 4$ och $a \neq -2$, så skulle lösningen vara

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{(2+a)(a-4)} \\[2ex] y = -\dfrac{a+4}{(2+a)(a-4)} \\[2ex] z = \dfrac{a+1}{(2+a)(a-4)} \end{cases}$$

, nu förstår du varför man krävde att $a \neq 4$ och $a \neq 2$, och även att ordet och här har extremt stort betydelse!