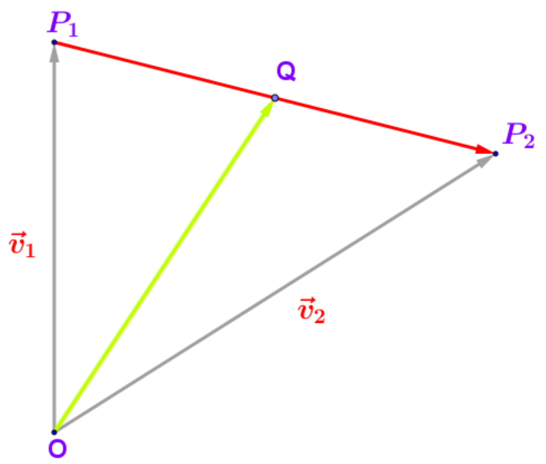
Uppgift 1.4a,b problemsamling

4a

Börja med att rita figur och inför lämpliga beteckningar!



I uppgiften är följande givet med:

$$\overrightarrow{P_1Q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \text{ och } \overrightarrow{QP_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$$

Följande samband fås direkt från figuren:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{OQ} \\ \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_2Q} = \overrightarrow{OQ} \end{cases}$$

Vi vet att $\overrightarrow{P_1Q} = -\overrightarrow{P_2Q}$, insättning av respektive i systemet ovan ger då (obs: vektorerna är parallella men har olika riktningar (titta på bilden) därför behövs minustecknet för att likheten ska gälla)

$$\begin{cases} \vec{v}_1 - \overrightarrow{P_2Q} = \overrightarrow{OQ} \\ \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_2Q} = \overrightarrow{OQ} \end{cases}$$

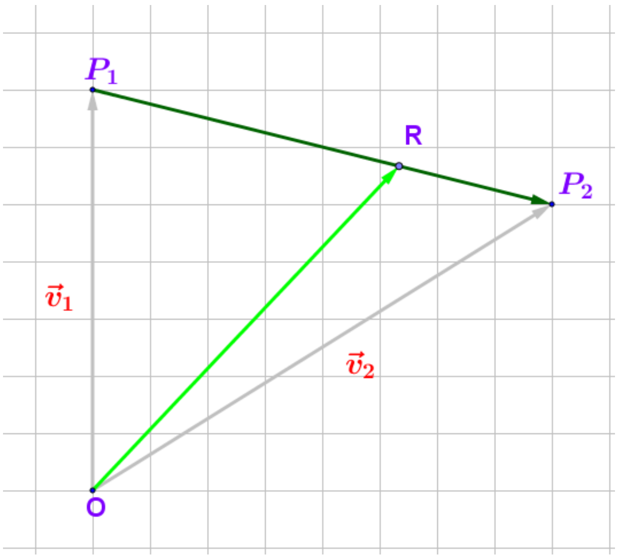
Additionsmetoden (vi adderar respektive led i respektive ekvation till varandra: ekvation1 + ekvation2) ger:

$\vec{v}_1 - \overrightarrow{P_2Q} + \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_2Q} = 2\cdot\overrightarrow{OQ}$ och vidare förenklad $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\cdot\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

Svar: $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

Du måste hela tiden uppmärksamma vektorernas riktningar då du sätter respektive samband. Figuren är A och O för att du ska lyckas lösa uppgiften.

4b Börja med att rita figur med lämpliga beteckningar



Vi vet att : $\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1R}\right|}{\left|\overrightarrow{P_2R}\right|} = \dfrac{p}{q}$ som kan även uttryckas som

$\left|\overrightarrow{P_1R}\right| = \frac{p}{q}\cdot\left|\overrightarrow{P_2R}\right|$. Vi vet alltså sambandet mellan respektive längder!

Sambandet mellan vektorerna blir då:

$\overrightarrow{P_1R} = -\frac{p}{q}\cdot\overrightarrow{P_2R} = \frac{p}{q}\cdot\overrightarrow{RP_2}$ (Obs: $\overrightarrow{P_1R} \,//\, \overrightarrow{P_2R}$, titta på bilden!

Vektorerna är parallella men har olika riktningar, titta noga på notationen. Vi söker ortsvektor $\overrightarrow{OR} = ?$ som linjär kombination av de övriga givna ortsvektorer (vilka? 😊)

Uppgift 1.4a,b problemsamling

Observera att lösningsidén är exakt likadan som för 4a, skillnaden är att i 4a är både p och q lika med 1. Så direkt från bilden får vi:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \overrightarrow{P_1R} = \overrightarrow{OR} \\ \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_2R} = \overrightarrow{OR} \end{cases}$$

Additionsmetoden (vi adderar respektive led i respektive ekvation till varandra: ekvation1 + ekvation2) ger:

$$\vec{v}_1 + \overrightarrow{P_1R} + \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_2R} = 2 \cdot \overrightarrow{OR}$$

alltså

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_1R} - \overrightarrow{RP_2} = 2 \cdot \overrightarrow{OR}$$

Nu gäller det att använda oss av given samband för vektorerna av intresse: $\overrightarrow{P_1R} = -\frac{p}{q} \cdot \overrightarrow{P_2R} = \frac{p}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2}$ och

att vi vet att (från figuren)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1R} + \overrightarrow{RP_2} = \left[\begin{matrix} \text{vi vet att} \\ \overrightarrow{P_1R} = \frac{p}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2} \end{matrix} \right] = \frac{p}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2} + \overrightarrow{RP_2} = \left(\frac{p}{q} + 1 \right) \cdot \overrightarrow{RP_2} =$$

$$= \left(\frac{q}{q} + \frac{p}{q} \right) \cdot \overrightarrow{RP_2} = \frac{(q+p)}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2}$$

Som ger $\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{(q-p)}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2}$ från bilden vet vi även att $\vec{v}_1 + \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{v}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Sambanden $\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{(q-p)}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2}$ och $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ger vidare att

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{(q+p)}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{RP_2} = \frac{q}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\overrightarrow{P_1R} = \frac{p}{q} \cdot \overrightarrow{RP_2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \frac{p}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$\overrightarrow{P_1R} = \frac{p}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ och $\overrightarrow{RP_2} = \frac{q}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Nu tillbaka till systemet som har gett oss

$\vec{v}_1 + \overrightarrow{P_1R} + \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_2R} = 2 \cdot \overrightarrow{OR}$ alltså $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \overrightarrow{P_1R} - \overrightarrow{RP_2} = 2 \cdot \overrightarrow{OR}$. Insättningen i ekvationen av de grönt markerade sambanden ger

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{p}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) - \frac{q}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 2 \cdot \overrightarrow{OR} .$$

Nu ska vi bara fokusera på att förenkla uttrycket så långt det går.

Uppgift 1.4a,b problemsamling

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{(p-q)}{(q+p)} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 2 \cdot \overrightarrow{OR}$$

$$\left(1 - \frac{(p-q)}{(q+p)}\right) \cdot \vec{v}_1 + \left(1 + \frac{(p-q)}{(q+p)}\right) \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot \overrightarrow{OR}$$

$$\frac{q}{(q+p)} \cdot \vec{v}_1 + \frac{p}{(q+p)} \cdot \vec{v}_2 = \overrightarrow{OR}$$

$$\frac{1}{(q+p)} \cdot (q \cdot \vec{v}_1 + p \cdot \vec{v}_2) = \overrightarrow{OR}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{(q+p)} \cdot (q \cdot \vec{v}_1 + p \cdot \vec{v}_2)$$

Svar: $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{(q+p)} \cdot (q \cdot \vec{v}_1 + p \cdot \vec{v}_2)$.

Kommentar: viktigt att tänka på att vektorerna kan multipliceras med en konstant men absolut inte divideras med en konstant. Titta gärna på vilka operationen är tillåtna bland annat i dina anteckningar från undervisningen.