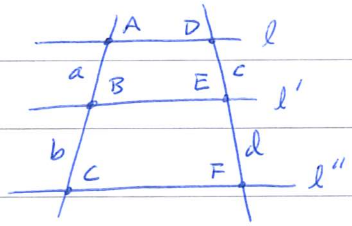
Likformighet

Parallellprojektionssatsen

I figuren



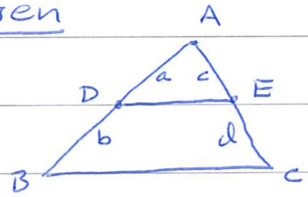
där $l \parallel l' \parallel l''$, gäller att $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

B $\frac{|\Delta ABE|}{|\Delta BCE|} = \frac{a}{b}$ (samma höjd från E), och $\frac{|\Delta DEB|}{|\Delta EFB|} = \frac{c}{d}$ (samma höjd från B). Men $|\Delta ABE| = |\Delta DEB|$, ty $l \parallel l'$ så höjd från A resp. från D lika.

P.s.s fås $|\Delta BCE| = |\Delta EFB|$, ty $l' \parallel l''$, så $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Transversalsatsen

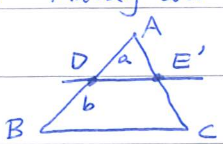
I figuren



gäller: $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

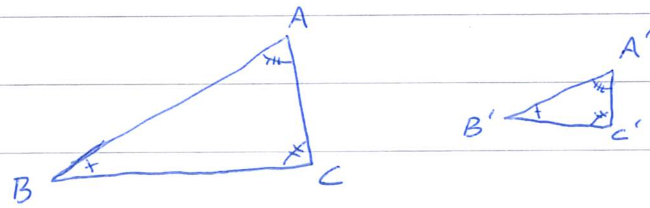
B ($\Rightarrow$) Följer av $\parallel$-proj.s. (dra en linje genom A parallell med DE).

($\Leftarrow$) Antag att $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Dra linje genom D, $\parallel$ med BC:

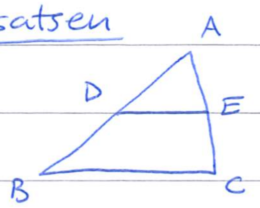


Den skär AC i E'. Av ($\Rightarrow$) fås $\frac{a}{b} = \frac{AE'}{E'C}$, så $\frac{AE'}{E'C} = \frac{c}{d}$, dvs $E' = E$, så $DE \parallel BC$.

Def ΔABC och $\Delta A'B'C'$ är likformiga (skrivs: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$) om: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ och $\angle C = \angle C'$.



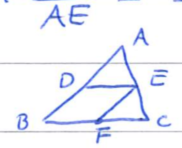
Topptriangelsatsen

I figuren  där $DE \parallel BC$, gäller att $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

$\underline{B}$ $\angle DAE = \angle BAC$. $\angle ADE = \angle ABC$ och $\angle AED = \angle ACB$,

ty likbelägna vinklar och $DE \parallel BC$.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD+DB}{AD} = 1 + \frac{DB}{AD} \overset{\text{transv.s.}}{=} 1 + \frac{EC}{AE} = \frac{AE+EC}{AE} = \frac{AC}{AE}.$$

Dra EF så att $EF \parallel AB$: 

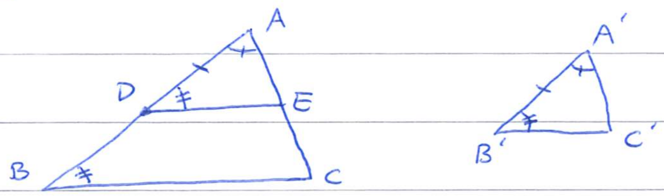
$$\frac{BC}{DE} = \frac{BF+FC}{DE} = 1 + \frac{FC}{BF} \overset{\text{transv.s.}}{=} 1 + \frac{EC}{AE} = \frac{AC}{AE}.$$

$DE = BF$ ty $BDEF$ parallellogram.

Sats (Likf. SVS) Trianglar med två sidor proportionella och mellanliggande vinkel lika är likformiga.

Sats (Likf. SSS) Trianglar med proportionella sidor är likformiga.

Sats (VV) Trianglar med två vinklar lika är likformiga.

$\underline{B}$ av (VV): 

Antag att $\angle A = \angle A'$ och $\angle B = \angle B'$. Vi kan anta att $AB > A'B'$, ty om $AB = A'B'$ är $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (VSV), och fallet $AB < A'B'$ kan behandlas som nedan. Sätt ut D så att $AD = A'B'$. Dra DE så att $DE \parallel BC$. Då är $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (Topp-Δ.s.) Dessutom: $\angle ADE = \angle B$ (likbelägna och $DE \parallel BC$), så $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$ (VSV), så $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Se kompendiet för bevis av de andra likformighetskriterierna.

Medelvärden

Låt $a, b > 0$.

Aritmetiska medelvärdet : $A = \frac{a+b}{2}$ $(A + A = a + b)$

Geometriska —"— : $G = \sqrt{ab}$ $(G \cdot G = ab)$

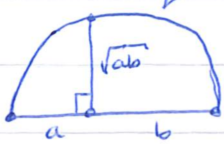
Harmoniska —"— : $H = \frac{2ab}{a+b}$ $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$H \leq G \leq A$ <u>B</u> $G \leq A$: $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$,

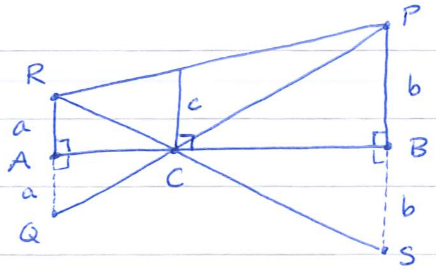
så $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

$H \leq G$: Övning...

<u>Ex</u> H grafiskt. (A: $\overset{a \quad b}{\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet}$ dela på mitten , G:



)



$$\frac{c}{2a} = \frac{CP}{QP} = \frac{CB}{AB} \quad (\text{Topp-}\Delta\text{.s. och } \parallel\text{-proj.s.})$$

$$\frac{c}{2b} = \frac{CR}{SR} = \frac{CA}{BA} \quad (\text{ ——"—— })$$

$$\text{Så} \quad \frac{c}{2a} + \frac{c}{2b} = \frac{CB}{AB} + \frac{CA}{BA} = \frac{BC + CA}{BA} = 1,$$

$$\text{så} \quad c = \frac{1}{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}} = \frac{1}{\left(\frac{b+a}{2ab}\right)} = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{är harmoniska}$$

medelvärdet av a och b.