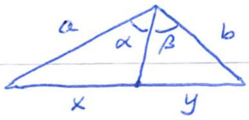
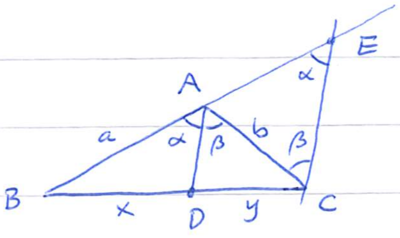
Trianglar

Bisektrissatsen

I figuren 

gäller: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

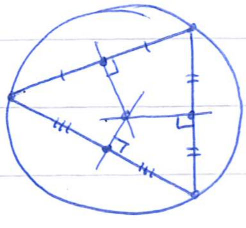
B 

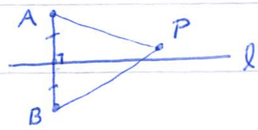
Dra linje ∥ med AD genom C. Förläng BA tills den skär linjen i E. $AD \parallel EC$ så alt.v.s. ger  och .

(⇒) Antag att $\alpha = \beta$. Då är $AE = b$ (basv.s.).
Transv.s. ger att $\frac{x}{y} = \frac{a}{AE} = \frac{a}{b}$.

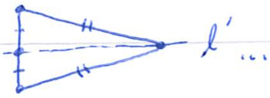
(⇐) Antag att $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Transv.s. ger att $\frac{x}{y} = \frac{a}{AE}$, så $AE = b$, så basv.s. ger att $\alpha = \beta$.

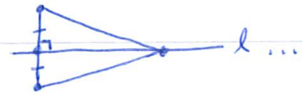
Sats I en triangel skär de tre mittpunktsnormalerna varandra i en punkt, den omskrivna cirkelns medelpunkt:



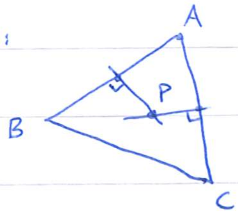
B Lemma: I figuren 

gäller: $PA = PB \Leftrightarrow P$ på l.

[B av lemma: (⇒) 

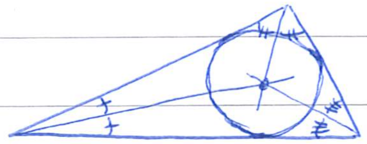
(⇐) 

]

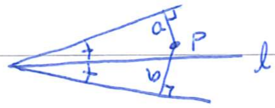
Nu: 

Låt P vara skärningen mellan mittp.normalerna för AB och AC. Då är $PA = PB$ och $PA = PC$, så $PB = PC$, så P ligger på mittp.normalen för BC. (Lemmat användes tre ggr.)

Sats I en triangel skär de tre bisektriserna varandra i en punkt, den inskrivna cirkelns medelpunkt:

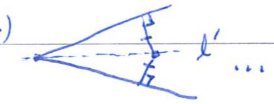


B Lemma: I figuren

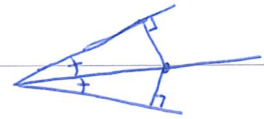


gäller: $a=b \Leftrightarrow P$ på l.

[**B** av lemma: $(\Rightarrow)$

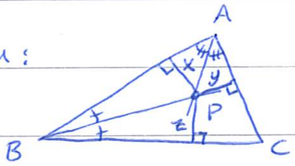


... $(\Leftarrow)$



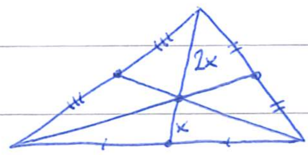
...]

Nu:

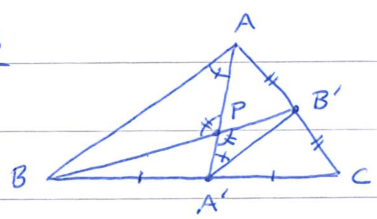


Låt P vara skärningen mellan bis. från A och B. Då är $x=y$ och $x=z$, så $y=z$, så P ligger på bis. från C.

Sats I en triangel skär de tre medianerna varandra i en punkt (triangelns "tyngdpunkt"), som delar varje median i förhållandet 2:1 :



B

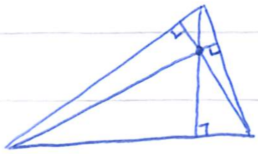


Dra medianer från A och B. Dra $A'B'$. Transv.s. $\Rightarrow A'B' \parallel AB$. Topp-$\Delta$.s ger att $\Delta A'B'C \sim \Delta BAC$, så $\frac{A'B'}{BA} = \frac{CB'}{CA} = \frac{1}{2}$.

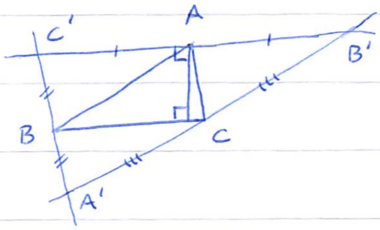
$\angle BAA' = \angle B'A'A$ (alt.v.s.), och vertikalvinklar vid P ger att $\Delta A'B'P \sim \Delta ABP$ (vv), så $\frac{PA'}{PA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$, dvs P delar medianen AA' i förh. 2:1.

P.s.s. delas AA' av medianen från C i förh. 2:1, så medianerna möts i P.

__Sats__ I en triangel skär de tre höjderna varandra i en punkt:



__B__



Dra linjer $\parallel$ med sidorna genom motstående hörn.

$BCAC'$ är $\parallel$-gram.

$C'A = BC = AB'$

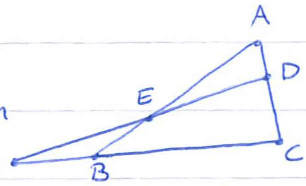
$BCB'A$ är $\parallel$-gram.

P.s.s. fås att $C'B = BA'$ och $A'C = CB'$.

Höjderna i ΔABC är alltså mittpunktsnormaler i $\Delta A'B'C'$, så de möts i en punkt.

__Menelaos sats__

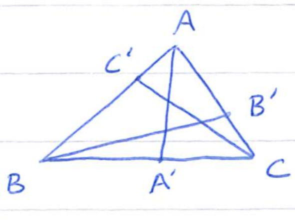
I figuren



gäller: $\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA} = 1$.

__B__ Se kompendiet.

__Cevas sats__ I figuren



gäller:

AA', BB' och CC' skär varandra i en punkt $\Leftrightarrow \frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A} = 1$.

__B__ Se kompendiet.