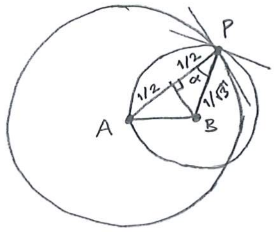
Lösningar, 91/92MA12, 2023-01-04

1.



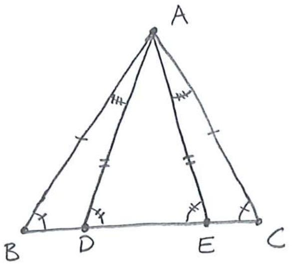
$AP = 1$, $BA = BP = 1/\sqrt{3}$.

Vinkeln mellan tangenterna i P är lika med α (i cirklar är radie $\perp$ tangent).

$\cos\alpha = \dfrac{1/2}{1/\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, så $\alpha = 30°$.

Svar: $30°$.

2.



Givet: $AB = AC$ och $AD = AE$.

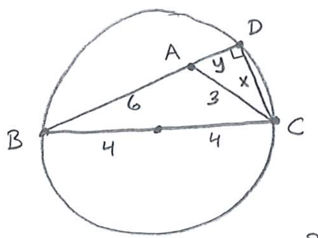
$\angle ABD = \angle ACE$, och $\angle ADE = \angle AED$ (basv.s.).

Av yttervinkelsatsen fås nu $\angle BAD = \angle CAE$,

så $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SVS), vilket ger

att $BD = CE$.

3.



Förläng BA till D. $\angle BDC = 90°$ (perif.v.s.).

Pyth. ger: $(6+y)^2 + x^2 = 8^2$, dvs

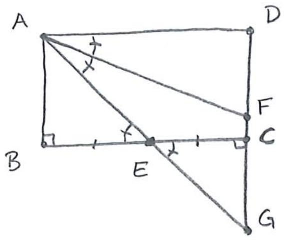
$36 + 12y + y^2 + x^2 = 64$, och $y^2 + x^2 = 3^2$,

så $36 + 12y + 9 = 64$, $y = 19/12$.

$BD = 6 + y = 6 + \dfrac{19}{12}$, så:

Svar: $\dfrac{91}{12}$ cm.

4.



$BE = CE$, och $CF = CD/5$. Sätt $x = AD/AB$.

Förläng AE och DC till skärning i G.

$\triangle GCE \cong \triangle ABE$ (VSV), så $GC = AB = CD$.

$$\frac{AD}{AG} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + (2AB)^2}} = \frac{AD/AB}{\sqrt{(AD/AB)^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

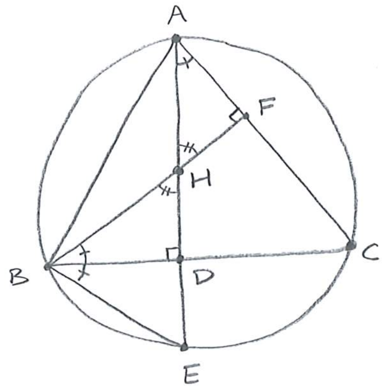
Bisektrissatsen ger: $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{DF}{GF} = \dfrac{(4/5)CD}{(6/5)CD} = \dfrac{2}{3}$, så

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{2}{3}$, $3x = 2\sqrt{x^2+4}$, $9x^2 = 4(x^2+4)$, $5x^2 = 16$, $x = 4/\sqrt{5}$.

Svar: $4/\sqrt{5}$.

5. Se kompendiet.

6.



Förläng AD till skärning i E med ΔABC:s omskrivna cirkel, och dra BE.

Periferiv.s. ger att $\angle EBC = \angle EAC$.

Dra ΔABC:s höjd BF från B.

$\angle HAF = \angle HBD$ ty de är komplementvinklar till vertikalvinklarna vid H.

Alltså är $\angle HBD = \angle EBD$, så $\Delta BDH \cong \Delta BDE$ (VSV), vilket ger att $ED = HD$. Kordasatsen ger nu att

$$BD \cdot CD = AD \cdot ED = AD \cdot HD.$$