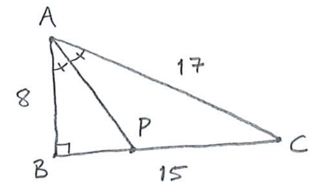
# Lösningar, 91/92MA12, 2023-06-07

1.



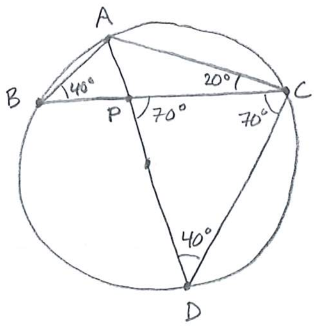

$AC = \sqrt{8^2+15^2} = 17$ (enl. Pythagoras).

Bisektrissatsen ger att

$BP = \frac{8}{8+17} \cdot 15 = \frac{8 \cdot 3 \cdot 5}{25}$, så:

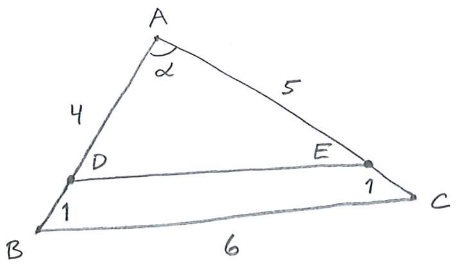
Svar: $\frac{24}{5}$ cm.

2.




$\angle ACD$ är periferivinkel på en halvcirkel, så $\angle ACD = 90°$, vilket ger $\angle BCD = 70°$. Periferiv.s. ger att $\angle ADC = \angle ABC = 40°$. Alltså är $\angle DPC = 180° - 40° - 70° = 70°$ (vinkelsumma i triangel), så enl. basv.s. är $\Delta DPC$ likbent, dvs: $DP = DC$.

3.




Cosinussatsen ger:

$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos\alpha$, så

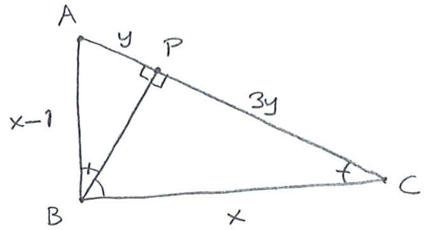
$\cos\alpha = \frac{16+25-36}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$.

Cos.s. igen:

$$DE^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos\alpha = 9 + 16 - 3 = 22 \text{, så:}$$

Svar: $\sqrt{22}$ cm.

4.




$AP/AC = 1/4$ ger att $AP = y$ och $PC = 3y$ för något $y > 0$.
$\angle C = 90° - \angle PBC = \angle PBA$ (komplementvinklar, och $\Delta ABC$ rätvinklig vid B).

$\Delta ABP \sim \Delta ACB$ (VV), så $\dfrac{x-1}{4y} = \dfrac{y}{x-1}$, $(x-1)^2 = 4y^2$.

$\Delta BCP \sim \Delta ACB$ (VV), så $\dfrac{x}{4y} = \dfrac{3y}{x}$, $x^2 = 3 \cdot 4y^2$.

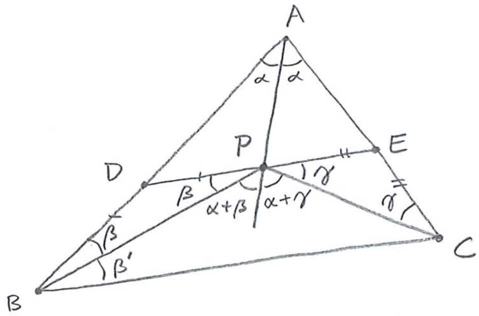
Detta ger att $\dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 3$, $x = \sqrt{3}(x-1)$, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$, så arean blir

$$|\Delta ABC| = \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)^2} =$$ (ok som svar)

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2}{2(3-1)^2} = \frac{\sqrt{3}(3+1+2\sqrt{3})}{2 \cdot 4},$$ så: Svar: $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ cm$^2$.

5. Se kompendiet.

6.




Sätt $\alpha = \angle BAP = \angle CAP$, $\beta = \angle ABP$, $\beta' = \angle PBC$ och $\gamma = \angle ACP$, så att $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Yttervinkelsatsen ger vinklarna $\alpha + \beta$ och $\alpha + \gamma$ vid P.

Sätt ut D på AB så att $\angle DPB = \beta$, och E på AC så att $\angle EPC = \gamma$.
Basvinkelsatsen ger att $DP = DB$ och att $EP = EC$.
Eftersom $\beta + (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma) + \gamma = 2(\alpha+\beta+\gamma) = 180°$ ligger D, P och E på en linje.
Bisektrissatsen ger att $\dfrac{DP}{EP} = \dfrac{AD}{AE}$, så $\dfrac{DB}{EC} = \dfrac{AD}{AE}$, dvs $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, vilket medför (transversalsatsen) att $DE \parallel BC$.
Nu ger alternatvinkelsatsen att $\beta = \beta'$.

(Ett kortare bevis kan fås genom att utgå från att bisektriserna till en triangel skär varandra i en punkt.)