

Eget material

av

Malgorzata Wesolowska



Exempel : Undersök och rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 3}{x}$.

Lösning :

1. Ange D_f .

$$x \neq 0,$$

detta medför att linjen med ekvationen $x=0$ är funktionens lodräta asymptot ($x=0$ är y -axeln)

$$\text{Vidare får vi att } f(x)=0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \text{ekvationen har inga reella nollställen} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ funktionen har inga nollställen

2. Beräkna $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x+3) \cdot x - (3x^2 + 3x + 3)}{x^2} = \frac{6x^2 + 3x - 3x^2 - 3x - 3}{x^2} = \frac{3x^2 - 3}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)}{x^2} = \\ &= \frac{3(x-1)(x+1)}{x^2} \quad \text{OBS! försök alltid att faktorisera!!!!} \end{aligned}$$

3. Hitta derivatans nollställen. (observera att $D_{f'} = D_f$).



...nä men halåj du har väl koll på att **"täljaren bestämmer"** om en kvot antar värdet noll eller inte...så klart att du **måste** först förenkla kvoten så långt det går och glöm inte att INTE RÖRA NÄMNAREN OM DEN ÄR REDAN FAKTORISERAD:::**TYP NEVER EVER FOR EVER**

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)=0 \text{ eller } (x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ eller } x=-1$$

4. Undersök derivatans "tecken". Sammanställ en tabell

vi konstaterar här att $f'(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{x^2}$ nämnare är alltid positiv, detta medför att derivatans tecken är helt beroende av tecken på $(x-1)(x+1)$ och inget annat :))



x	-1	0	1			
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

Diagram illustrating the first derivative test for a function $f(x)$ at critical points.

The horizontal axis represents x , with critical points marked at $x = -1$, $x = 0$, and $x = 1$.

The vertical axis represents the function value $f(x)$.

The sign of the first derivative $f'(x)$ is indicated above the axis:

- For $x < -1$, $f'(x) > 0$ (positive).
- At $x = -1$, $f'(x) = 0$.
- For $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$ (negative).
- At $x = 0$, $f'(x) = 0$.
- For $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ (negative).
- At $x = 1$, $f'(x) = 0$.
- For $x > 1$, $f'(x) > 0$ (positive).

The function $f(x)$ is represented by a curve (pink line) that is increasing for $x < -1$, decreasing for $-1 < x < 0$, and increasing for $x > 1$.

The critical points are classified as follows:

- At $x = -1$, the function has a **lokal maximipunkt** (local maximum point).
- At $x = 0$, the function has a **Ej def.** (Not defined) point, indicated by a red dashed vertical line and a pink circle.
- At $x = 1$, the function has a **lokal minimipunkt** (local minimum point).

Gränsvärden då
 $x \rightarrow -\infty$ och då
 $x \rightarrow 0^-$
placeras efter
beräkningar i
punkt 5

Lodrät asymptot
 $x = 0$

Gränsvärden då
 $x \rightarrow +\infty$ och då
 $x \rightarrow 0^+$
placeras efter
beräkningar i
punkt 5



$$f_{\max}(-1) = \frac{3(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 3}{(-1)} = -3$$

$$f_{\min}(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 3}{1} = 9$$



5. Undersök hur kurvanuppför sig vid $x = 0$ och då $x \rightarrow -\infty$ respektive $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 3x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) = 3(0 + 1 - \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 3x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) = 3(0 + 1 + \infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \left[\text{ty } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ och } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ och } 3x \rightarrow +\infty \text{ då } x \rightarrow +\infty \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \left[\text{ty } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ och } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ och } 3x \rightarrow -\infty \text{ då } x \rightarrow -\infty \right] = -\infty \end{aligned}$$

Vi söker nu sneda asymptoter $y = kx + m$:

Antingen konstaterar vi här på en gång att

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 3}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{3}{x} = 3x + 3 + \frac{3}{x} \rightarrow f(x) = 3x + 3 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty,$$

$$\text{ty } \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty$$

alltså den **sneda asymptoten** ges av $f(x) = 3x + 3$.

...eller tar vi fram k och m med hjälp av:

Eget material

av

Malgorzata Wesolowska



$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 3x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) = \left[\text{ty } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ och } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow +\infty \right] = 3(1 + 0 + 0) = 3$$

även

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) = \left[\text{ty } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ och } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow -\infty \right] = 3(1 + 0 + 0) = 3$$

summa summarum $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 3x + 3}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 3x + 3 - 3x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x + 3}{x} \right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3 + \frac{3}{x} \right) = \left[\text{ty } \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty \right] = 3 + 0 = 3$$

för $k = 3$ och $m = 3$ ges den sneda asymptoten av $y = 3x + 3$.



6. Komplettera tabellen

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	lokal maximipunkt (-1,-3)	$-\infty$
		Ej def.	$+\infty$
			lokal minimipunkt (1,9)
			$+\infty$

7. Rita grafen till funktionen

