Eget material
av
Malgorzata Wesolowska

Övningar!

Beräkna följande gränsvärden (uppgifterna 1-3):

1. $(a)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x}{3x^3-x^2+7}$ $\qquad (b)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}+\cos x}$

2. $(a)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ $\qquad (b)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

3. $(a)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $\qquad (b)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

4. *Bestäm alla asymptoter till kurvan* $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$.

5. *Bestäm ev. asymptot till kurvan* $y=\sqrt{x^2+x}$ *då* $x\to-\infty$.

6. *Bestäm ev. asymptot till kurvan* $y=\dfrac{x^3}{x^2-x-2}\, x\to\pm\infty$.

Lösningar:

1a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x}{3x^3-x^2+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}\right)}=$$

$$=\left[\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{1}{x^2}\to 0 \quad och \quad \frac{7}{x^3}\to 0 \quad då \quad x\to+\infty\right]=\frac{2+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}$$

svar: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x}{3x^3-x^2+7}=\frac{2}{3}$

1b

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}+\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}+\cos x}=\left[x>0\Rightarrow|x|=x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}+\frac{\cos x}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}+\frac{\cos x}{x}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}\to 0 \quad och \quad \frac{2}{x^3}\to 0 \quad då \quad x\to+\infty \quad och\\ \frac{\cos x}{x}\to 0 \quad för \quad att \quad -1\le\cos x\le -1 \quad \text{(det är viktigt här}\\ att \quad ange \quad att \quad \cos x \quad \text{är begränsad!!!)} \quad och \quad x\to+\infty\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0+0}}=1$$

svar: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}+\cos x}=1$

2a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\left[x>0\Rightarrow|x|=x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\left[\frac{1}{x^2}\to 0\quad \text{då}\quad x\to+\infty\right]=\sqrt{(1+0)}=1$$

svar: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$

2b

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\left[x<0\Rightarrow|x|=-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\left[\frac{1}{x^2}\to 0\quad \text{då}\quad x\to-\infty\right]=-\sqrt{(1+0)}=-1$$

svar: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$

3a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}=\left[x>0\Rightarrow|x|=x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad \text{och} \quad \frac{1}{x^2}\to 0\\ \text{då} \quad x\to+\infty\end{array}\right]=0$$

svar: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$

3b

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left[\sqrt{x^2+1}\to+\infty \quad \text{då} \quad x\to-\infty\right]=+\infty-(-\infty)=+\infty$$

svar: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$

4

Bestäm alla asymptoter till kurvan $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$.

☞ Vi söker lodräta asymptoter

$D_f: x^2-1\neq 0$ *ger lodräta asymptoter*

$x=-1$ *då* $x\to 1^{\pm}$ *och* $x=1$ *då* $x\to 1^{\pm}$.

☞ Vi söker horisontella asymptoter

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{1}{x^2}\to 0 \quad och \\ \frac{1}{x^3}\to 0 \quad då \quad x\to+\infty\end{array}\right]=$$

$$=\frac{+\infty\cdot(1+0+0)}{1-0}=+\infty \quad \Rightarrow \text{ fuktionen har igen horisontell asymptot då } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{1}{x^2}\to 0 \quad och \\ \frac{1}{x^3}\to 0 \quad då \quad x\to-\infty\end{array}\right]=$$

$$=\frac{-\infty\cdot(1+0+0)}{1-0}=-\infty \quad \Rightarrow \text{ fuktionen har igen horisontell asymptot då } x\to-\infty$$

☞ Vi söker sneda asymptoter

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{1}{x^2}\to 0 \quad och \\ \frac{1}{x^3}\to 0 \quad då \quad x\to\pm\infty\end{array}\right]=\frac{1+0+0}{1-0}=1$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\left[k=1\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}-x\cdot\frac{(x^2-1)}{x^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2+1-x\cdot(x^2-1)}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2+1-x^3+x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{1}{x^2}\to 0\\ då \quad x\to\pm\infty\end{array}\right]=\frac{1+0+0}{1-0}=1$$

$k=1$ och $m=1$ ger den sneda asymptoten $y=x+1$.

svar:

lodräta asymptoter $x=-1$ *då* $x\to 1^{\pm}$ *och* $x=1$ *då* $x\to 1^{\pm}$

sned asymptot $y=x+1$.

5

Bestäm ev. asymptot till kurvan $y=\sqrt{x^2+x}$ *då* $x\to-\infty$.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=$$

$$=\left[x<0\Rightarrow|x|=-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{x}\to 0 \quad då \quad x\to-\infty\right]=-\sqrt{1+0}=-1$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\left[k=-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=[\ ]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)}=$$

$$=\left[x<0\Rightarrow|x|=-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(-x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-1\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=$$

$$=\left[\frac{1}{x^2}\to0\quad då\quad x\to-\infty\quad\right]=\frac{1}{-\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

$k=-1$ och $m=-\frac{1}{2}$ ger den sneda asymptoten $y=-x-\frac{1}{2}$.

svar: sned asymptot $y=-x-\frac{1}{2}$.

6

Bestäm ev. asymptot till kurvan $y=\frac{x^3}{x^2-x-2}$ $x\to\pm\infty$.

☞ Vi söker först horisontella asymptoter

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot x}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\left[\begin{matrix}\frac{1}{x}\to0\ \text{och}\ \frac{2}{x^2}\to0\ \text{och}\\ x\to+\infty\ \text{då}\ x\to+\infty\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{+\infty}{1-0-0}=+\infty$$ $\Rightarrow$ fuktionen har igen horisontell asymptot då $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot x}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{2}{x^2}\to 0 \quad och \\ x\to-\infty \ då \quad x\to-\infty\end{array}\right]=$$

$$=\frac{-\infty}{1-0-0}=-\infty \quad \Rightarrow fuktionen \quad har \quad igen \quad horisontell \quad asymptot \quad då \quad x\to-\infty$$

☞ Vi söker sneda asymptoter

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-x-2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-x-2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{1}{x^2}\to 0 \\ då \quad x\to\pm\infty\end{array}\right]=\frac{1}{1-0-0}=1$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=[k=1]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-x-2}-\frac{x\left(x^2-x-2\right)}{x^2-x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x^2+2x}{x^2-x-2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-x-2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to 0 \quad och \quad \frac{2}{x^2}\to 0 \quad och \quad \frac{2}{x^2}\to 0 \\ då \quad x\to\pm\infty\end{array}\right]=\frac{1+0}{1-0-0}=1$$

$$k=1 \quad och \quad m=1 \quad ger \quad den \quad sneda \quad asymptoten \quad y=x+1.$$

svar: *sned asymptot* $y=x+1$