Eget material
av
Malgorzata Wesolowska

Exempel: Undersök och rita grafen till funktionen $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+3}{x}$.

Lösning:

1.Ange D_f .

$$x \neq 0 \;,$$

detta medför att linjen med ekvationen $x=0$ är funktionens lodräta asymptot ($x=0$ är y-axeln)

Vidare får vi att $f(x)=0 \Rightarrow 3x^2+3x+3=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ ekvationen har inga reella nollställen $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ funktionen har inga nollställen

2.Beräkna $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{(6x+3)\cdot x-\left(3x^2+3x+3\right)}{x^2}=\frac{6x^2+3x-3x^2-3x-3}{x^2}=\frac{3x^2-3}{x^2}=\frac{3(x^2-1)}{x^2}=$$

$$=\frac{3(x-1)(x+1)}{x^2}$$ OBS! försök alltid att faktorisera!!!!

3.Hitta derivatans nollställen .(observera att $D_{f'}=D_f$).

...nä men halåj du har väl koll på att **"täljaren bestämmer"** om en kvot antar värdet noll eller inte...så klart att du **måste** först förenkla kvoten så långt det går och glöm inte att INTE RÖRA NÄMNAREN OM DEN ÄR REDAN FAKTORISERAD:::**TYP NEVER EVER FOR EVER**

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)=0 \quad \text{eller} \quad (x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \;\text{ eller }\; x=-1$$

4.Undersök derivatans "tecken".Sammanställ en tabell

vi konstaterar här att $f'(x)=\dfrac{3(x-1)(x+1)}{x^2}$ nämnare är alltid positiv,detta medför att derivatans tecken är helt beroende av tecken på $(x-1)(x+1)$ och inget annat :))

Eget material
av
Malgorzata Wesolowska

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lokal maximipunkt	$\searrow$	Ej def.	$\searrow$	lokal minimipunkt	$\nearrow$

Gränsvärden då $x \to -\infty$ och då $x \to 0^-$ placeras efter beräkningar i punkt 5

Lodrät asymptot
$x = 0$

Gränsvärden då $x \to +\infty$ och då $x \to 0^+$ placeras efter beräkningar i punkt 5

$$f_{\max}(-1) = \frac{3(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 3}{(-1)} = -3$$

$$f_{\min}(1) = \frac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 3}{1} = 9$$

5. Undersök hur kurvan uppför sig vid $x = 0$ och då $x \to -\infty$ respektive $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to -0^-}\frac{3x^2+3x+3}{x}=\lim_{x\to -0^-}\frac{3x\left(x+1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to -0^-}3\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=3(0+1-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -0^+}\frac{3x^2+3x+3}{x}=\lim_{x\to -0^+}\frac{3x\left(x+1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to -0^+}3\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=3(0+1+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to -+\infty}3\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to -+\infty}3x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\left[ty\ \ \frac{1}{x}\to 0 \text{ och } \frac{1}{x^2}\to 0 \text{ och } 3x\to+\infty \text{ då } x\to+\infty\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to --\infty}3\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to --\infty}3x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\left[ty\ \ \frac{1}{x}\to 0 \text{ och } \frac{1}{x^2}\to 0 \text{ och } 3x\to-\infty \text{ då } x\to-\infty\right]=-\infty$$

Vi söker nu sneda asymptoter $y = kx + m$:

Antingen konstaterar vi här på en gång att

$$f(x)=\frac{3x^2+3x+3}{x}=\frac{3x^2}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{3}{x}=3x+3+\frac{3}{x}\to f(x)=3x+3 \text{ då } x\to\pm\infty,$$

$$ty\ \ \frac{3}{x}\to 0 \text{ då } x\to\pm\infty$$

*alltså den **sneda asymptoten** ges av* $f(x)=3x+3$.

…eller tar vi fram k och m med hjälp av:

Eget material
av
Malgorzata Wesolowska

$$k=\lim_{x\to-+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-+\infty}\frac{\dfrac{3x^2+3x+3}{x}}{x}=\lim_{x\to-+\infty}\left(\frac{3x^2+3x+3}{x^2}\right)=\lim_{x\to-+\infty}\frac{3x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to-+\infty}\left(3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)=\left[ty\quad \frac{1}{x}\to 0 \text{ och } \frac{1}{x^2}\to 0 \text{ då } x\to+\infty\right]=3(1+0+0)=3$$

även

$$k=\lim_{x\to--\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to--\infty}\left(3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)=\left[ty\quad \frac{1}{x}\to 0 \text{ och } \frac{1}{x^2}\to 0 \text{ då } x\to-\infty\right]=3(1+0+0)=3$$

$$\text{summa summarum}\quad k=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

$$m=\lim_{x\to-\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\pm\infty}\left(\frac{3x^2+3x+3}{x}-3x\right)=\lim_{x\to-\pm\infty}\left(\frac{3x^2+3x+3-3x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\pm\infty}\left(\frac{3x+3}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\pm\infty}\left(\frac{3x}{x}+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to-\pm\infty}\left(3+\frac{3}{x}\right)=\left[ty\quad \frac{3}{x}\to 0 \text{ då } x\to\pm\infty\right]=3+0=3$$

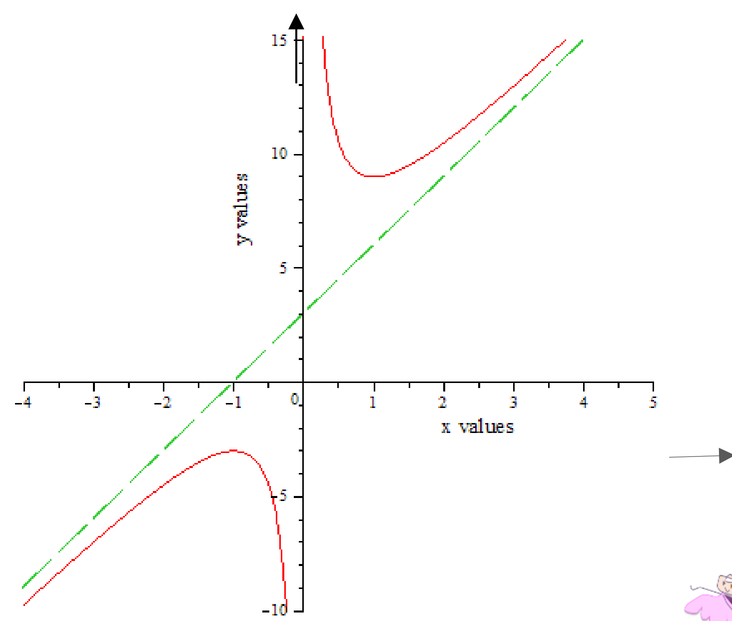
för $k=3$ *och* $m=3$ *ges den sneda asymptotevav* $y=3x+3$.

Eget material
av
Malgorzata Wesolowska

6. Komplettera tabellen

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	lokal maximipunkt $(-1,-3)$	↘ $-\infty$	Ej def.	$+\infty$ ↘	lokal minimipunkt $(1,9)$	↗ $+\infty$

7. Rita grafen till funktionen



A plot of $y = \dfrac{3x^2+3x+3}{x}$ and $y = 3x+3$ and $x = 0$.

Svar: $D_f =]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$, funktionen har en lokal maximipunkt $P_{max} = (-1,-3)$, funktionen har en lokal minimipunkt $P_{min} = (1,9)$. Asymptoterna är x=0 (lodrät) och sned asymptot $y = 3x + 3$.