

Finn alla komplexa lösningar till ekvationen  $z^3 = 8$ .  
Svara på formen  $a + bi$ .

**Ledning:** skriv både  $z$  och  $8$  i polär form

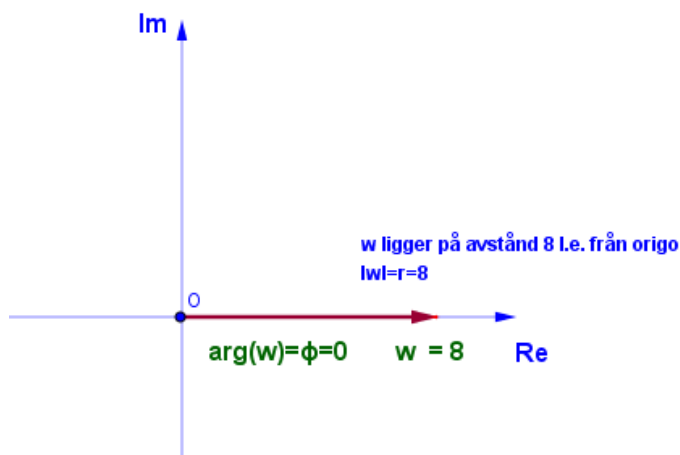
**Lösning:**

$$z^3 = 8$$

Vi börjar med att skriva det komplexa talet (vänster led av ekvationen)

$w = 8$  i polär form  $r(\cos\phi + i\sin\phi)$ .

där  $r = |8| = 8$  och  $\phi = \arg(8)$ . Tänk alltid på att rita bra bild !!! **Visualisera**



Alltså  $r = 8$  och  $\phi = 0 + 2\pi k \Rightarrow 8 = 8(\cos(0 + 2\pi k) + i\sin(0 + 2\pi k))$  med heltal  $k$ .

Ekvationen  $z^3 = 8$  kan nu skrivas på följande sätt  $z^3 = 8(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k))$  där  $k = 0, 1, 2$  (på grund av periodiciteten).

Genom att skriva  $z$  i polär form  $\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$  där  $|z| = \alpha$  och  $\arg(z) = \beta$  kommer ekvationen

$$z^3 = 8(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) \Rightarrow$$

$$(\alpha(\cos\beta + i\sin\beta))^3 = 8(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{med polär form för respektive led} \\ \text{av ekvationen} \\ \text{och de Moivres formel} \\ \text{får ekvationen följande form} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3(\cos(3\beta) + i\sin(3\beta)) = 8(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 8 \\ 3\beta = 2\pi k, \text{ där } k = 0, 1, 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\alpha > 0, \text{ ty } \alpha = |z|, \text{ avståndet}] \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{2\pi k}{3}, \text{ där } k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

vi får därför lösningarna

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\right), \text{ där } k = 0, 1, 2$$

För respektive värde på  $k$ , får vi nu alla tre lösningar till  $z^3 = 8$ :

$k = 0$  ger

$$z_1 = 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2(1 + i \cdot 0) = 2 \Leftrightarrow z_1 = 2$$

$k = 1$  ger

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3} \cdot i \Leftrightarrow z_2 = -1 + \sqrt{3} \cdot i$$

$k = 2$  ger

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{-1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3} \cdot i \Leftrightarrow z_3 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$$

**Svar:**

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3} \cdot i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3} \cdot i.$$