Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **KTR1**

Facit
2017-02-13 kl. 14-16

1. Lös ekvationen $2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1$ i intervallet $0 \le x \le 2\pi$.

$$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \qquad /:2$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ \text{eller} \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ \text{där } n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ \text{eller} \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n \\ \text{där } n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi n \\ \text{eller} \\ \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi n \\ \text{där } n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{6}+2\pi n \\ \text{eller} \\ \frac{x}{2}=\frac{7\pi}{6}+2\pi n \\ \text{där } n\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi+4\pi n \\ \text{eller} \\ x=\frac{7\pi}{3}+4\pi n \\ \text{där } n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

för $n=0$

$$\begin{cases} x=\pi \in [0,2\pi] \\ \text{eller} \\ x=\frac{7\pi}{3} \notin [0,2\pi] \end{cases}$$

för $n=1$

$$\begin{cases} x=\pi+4\pi \notin [0,2\pi] \\ \text{eller} \\ x=\frac{7\pi}{3}+4\pi \notin [0,2\pi] \end{cases}$$

alltså för $n<0$ och $n\geq 1$ har vi inga lösningar som tillhör intervallet $[0,2\pi]$

Svar: $x=\pi$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

2

2.

a. Bestäm y' då $y=\dfrac{e^{-x}}{x^2}$.

b. Bestäm $f'(\pi)$ då $f(x)=x^2\cos 2x$. Svara exakt.

a)

$$y' = \frac{-e^{-x}\cdot x^2 - e^{-x}\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-e^{-x}\cdot\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x^4}\,3} = \frac{-e^{-x}(x+2)}{x^3}$$

$$\left(= \frac{-e^{-x}\cdot\cancel{x}}{x^{\cancel{3}\,2}} - \frac{2e^{-x}}{x^3} = \frac{-e^{x}}{x^2} - \frac{2e^{-x}}{x^3}\right)$$

<u>Tips!</u> Det är inte <u>rekommenderat</u>! att skriva om kvoten till en produkt först!!! De flesta som gjorde det på duggan misslyckades med derivatorna i uppgift 2 och 3! Det finns mer fördelar att då man betraktar kvot som en kvot i framtiden och speciellt nu!!! Fråga varför din lärare!!!

b)

$$f'(x) = 2x\cos x + x^2\cdot(-\sin 2x)\cdot 2$$

$$f'(\pi) = 2\pi\underbrace{\cos\pi}_{=1} + \pi^2\cdot(-\underbrace{\sin 2\pi}_{=0})\cdot 2 = 2\pi\cdot 1 = 2\pi$$

Svar:

a) $y' = -\dfrac{e^{-x}}{x^2} - \dfrac{2e^{-x}}{x^3} = \dfrac{-e^{-x}(x+2)}{x^3}$

b) $f'(\pi) = 2\pi$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **KTR1**

3

3.

a) Skissa grafen till $f(x)=\dfrac{x^2+16}{4x}$ med hjälp av derivata.

b) Ange eventuella asymptoter till kurvan. Endast svar ger inga poäng.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+16}{4x}$ där $4x\neq 0 \iff x\neq 0$

• Alltså $D_f: x\neq 0$, $x=0$ är en lodrät asymptot!

• $f'(x)=\dfrac{2x\cdot 4x-(x^2+16)\cdot 4}{(4x)^2}=\dfrac{\cancel{4}(2x^2-x^2-16)}{\cancel{4}\cdot 4x^2}=\dfrac{x^2-16}{4x^2}=\dfrac{(x-4)(x+4)}{4x^2}$

Tips!
Alltid förenkla
och faktorisera!!!
innan man går vidare

• $f'(x)=0 \Rightarrow (x-4)(x+4)=0 \iff x=4$ eller $x=-4$

x		-4		0		4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f_{max}(-4)$	↘	ej def.	↘	$f_{min}(4)$	↗

OBS! derivatans tecken är beroende bara av täljaren! därför att nämnaren är alltid positiv i D_f

• lokal minimipunkt:

$$f_{min}(4)=\frac{16+16}{16}=2 \quad \text{alltså} \quad P_{min}=(4,2)$$

• lokal maximipunkt:

$$f_{max}(-4)=\frac{16+16}{-16}=-2 \quad \text{alltså} \quad P_{max}=(-4,-2)$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+16}{4x}=\left[\begin{array}{l} x^2+16\to 16 \text{ då } x\to 0^+ \\ 4x\to 0^+ \text{ då } x\to 0^+\end{array}\right]=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+16}{4x}=\left[\begin{array}{l} x^2+16\to 16 \text{ då } x\to 0^- \\ 4x\to 0^- \text{ då } x\to 0^-\end{array}\right]=-\infty$

1 • $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+16}{4x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cancel{x}(x+\frac{16}{x})}{4\cdot\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\frac{16}{x}}{4}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\dfrac{16}{x}\right)=$

• $=\left[\begin{array}{l} \frac{16}{x}\to 0 \text{ då } x\to +\infty \\ x\to +\infty \text{ då } x\to +\infty\end{array}\right]=\dfrac{1}{4}(+\infty+0)=+\infty$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

2• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{4} \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{16}{x}\right) = \left[\begin{array}{l} \frac{16}{x} \to 0 \text{ då } x \to -\infty \\ x \to -\infty \text{ då } x \to -\infty \end{array}\right] = \frac{1}{4}(-\infty + 0) = -\infty$

1• och 2• tolkas som att funktionen har <u>inga</u> <u>horisontella</u> asymptoter

b) vi söker den sneda asymptoten $y = kx + m$

$$f(x) = \frac{x^2+16}{4x} = \frac{x^2}{4x} + \frac{16}{4x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x} \to y = \frac{x}{4} \text{ då } x \to \pm\infty$$

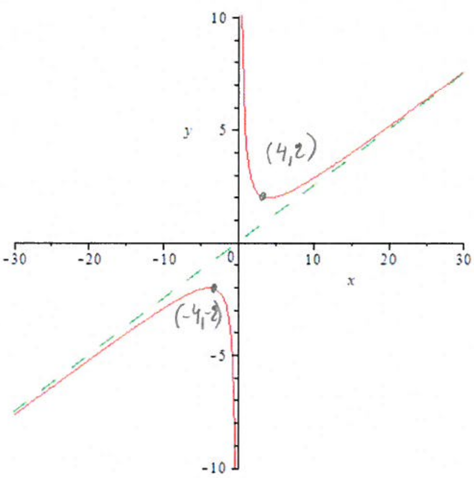
, tg $\frac{4}{x} \to 0$ då $x \to \pm\infty$

alltså den sneda asymptoten här är $y = \frac{x}{4}$ som kan fås även genom $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ och $m = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

Svar:

a) Lokal minimum i (4, 2) $D_f: x \neq 0$

Lokal maximum i (-4,-2)



b) Lodrät asymptot x=0

Sned asymptot y=x/4

4. Given $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} - 60°\right) + 1$

a) Ange kurvans period, amplitud och förskjutning. Motivera!
b) Ange också funktionens största och minsta värde. Motivera!

c) Upprita kurvan $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} - 60°\right) + 1$.

a)+b) • kurvan period ges av $P = \frac{360°}{\frac{1}{2}} = 720°$

• kurvans amplitud ges av $A = \frac{\text{största värde} - \text{minsta värde}}{2}$

för att $-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2} - 60°\right) \leq 1$ blir funktionens

största värde $= 3 \cdot 1 + 1 = 4$ och respektive

minsta värde $= 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

alltså $A = \frac{4 - (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$ är amplituden

• förskjutningen hittar vi genom att skriva om funktionen

$y = 3\sin\left(\frac{x}{2} - 60°\right) + 1 = 3\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \underbrace{120°}\right)\right) + 1$

ger förskjutningen 120° åt höger

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **KTR1**

y	v	$v = \frac{x}{2} - 60^\circ \Leftrightarrow 2v = x - 120^\circ \Leftrightarrow x = 2v + 120^\circ$		$3y+1$	punkter
0	0	$0 + 120^\circ$	$= 120^\circ$	1	$(120^\circ, 1)$
1	90°	$180^\circ + 120^\circ$	$= 300^\circ$	4	$(300^\circ, 4)$
0	180°	$360^\circ + 120^\circ$	$= 480^\circ$	1	$(480^\circ, 1)$
-1	270°	$540^\circ + 120^\circ$	$= 660^\circ$	-2	$(660^\circ, -2)$
0	360°	$720^\circ + 120^\circ$	$= 840^\circ$	1	$(840^\circ, 1)$

vi utgår från enhetscirkeln

OBSERVERA att grafen är ritad i ett annat intervall

Svar:

a) Period är 720°
Amplitud är 3
Förskjutning är 120° åt höger

b) Största värde är 4
Minsta värde är -2

c)