Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Facit/lösningsförslag 2015-03-16

1. a) $4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-2 \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ 3x-\frac{\pi}{4} = \pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n \\ 3x = \frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}+2\pi n \\ 3x = \frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{12}+2\pi n \\ 3x = \frac{14\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \\ 3x = \frac{17\pi}{12}+2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{17\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \end{cases}$$

<u>svar</u>: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{17\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3} \end{cases}$ där $n \in \mathbb{Z}$

1.

b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x = C\sin(x+\alpha)$ där $C > 0$

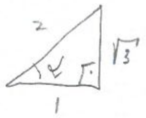
$$\begin{cases} f(x) = 1\cdot \sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x \\ f(x) = C\cdot\cos\alpha\cdot\sin x + C\sin\alpha\cdot\cos x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = C\cos\alpha \\ \sqrt{3} = C\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^2 = C^2\cos^2\alpha & (\text{ekv } 1) \\ 3 = C^2\sin^2\alpha & (\text{ekv } 2) \end{cases}$$

$$(\text{ekv } 1) + (\text{ekv } 2) \Rightarrow 4 = C^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2)}_{\text{trig. ettan}} \Leftrightarrow C^2 = 4 \Leftrightarrow C = \pm 2 \text{ och } C > 0 \text{ ger } \underline{\underline{C = 2}}$$

för $C = 2$ blir $\begin{cases} 1 = 2\cos\alpha \\ \sqrt{3} = 2\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, α ligger i första kvadranten

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}} \Rightarrow f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$



<u>Svar</u>: $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

1. c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \iff 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff$

$$\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \iff$$

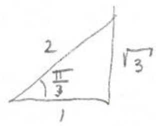
$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$$

<u>Svar</u>: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$ där $n \in \mathbb{Z}$

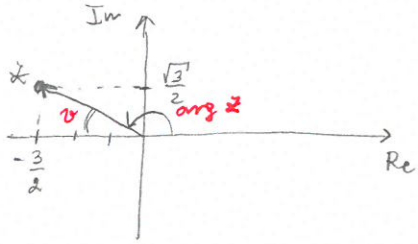
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

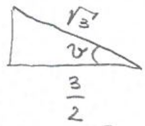
2. $z = e^{\frac{\pi}{3}i} - 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 = \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -\frac{3}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$



$\Rightarrow \arg z = \pi - v$ där mha figuren



blir $\cos v = \dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow v = \frac{\pi}{6}$

för $v = \frac{\pi}{6}$ blir argumentet för z, $\arg z = \pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$

Svar: $|z| = \sqrt{3}$ och $\arg z = \frac{5\pi}{6}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

3.

Söka skärningspunkter först!

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow \quad \cos x = \sin 2x \iff \cos x = 2\sin x \cos x \iff$$

$$\iff \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \iff \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0 \iff \cos x = 0 \text{ eller } 1 - 2\sin x = 0$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{eller} \quad \sin x = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}$$

för $n = -1$ ges $\underline{x = -\frac{\pi}{2}}$ eller $\left(x = -\frac{11\pi}{6}\right)$ eller $\left(x = -\frac{7\pi}{6}\right)$

för $n = 0$ ges $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ eller $\underline{x = \frac{\pi}{6}}$ eller $\left(x = \frac{5\pi}{6}\right)$

från bilden framgår att punkterna av intresse har x-koordinaterna $x = -\frac{\pi}{2}$ respektive $x = \frac{\pi}{6}$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos x - 0)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x)\,dx = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \Big(\underbrace{\sin 0}_{=0} - \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\Big) + \Big(\overbrace{\sin \tfrac{\pi}{6}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\overbrace{\cos \tfrac{\pi}{3}}^{\frac{1}{2}}}{2}\Big) - \Big(\overbrace{\sin 0}^{=0} + \frac{\overbrace{\cos 0}^{=1}}{2}\Big) =$$

$$= (0 - (-1)) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}\right) - \left(0 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Svar: $A = \frac{5}{4}$ ae

4. $f(x) = 2x + |1-3x|$

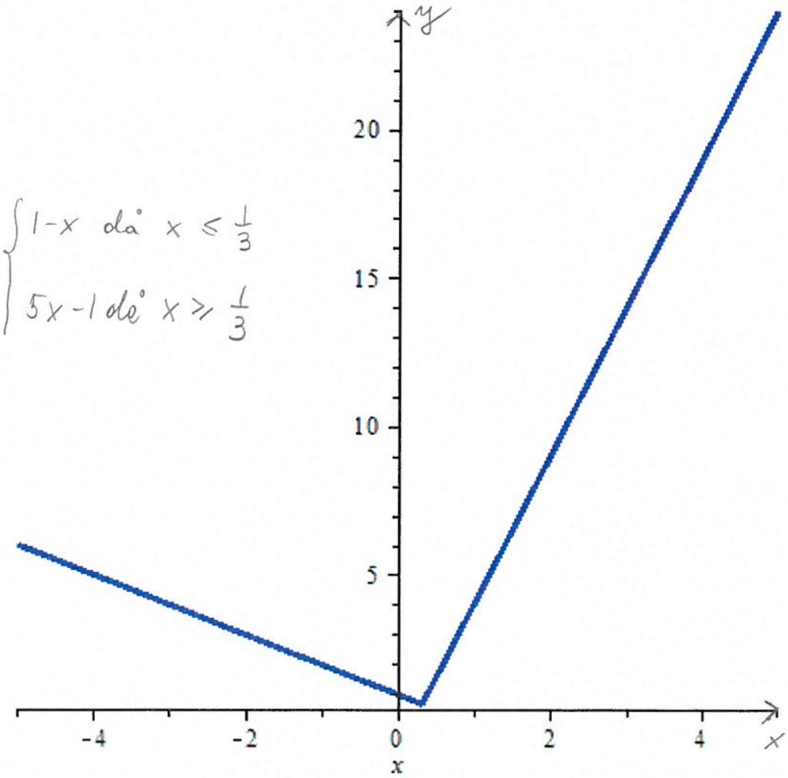
def. $|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{om } 1-3x \geq 0 \iff 1 \geq 3x \iff x \leq \frac{1}{3} \\ -(1-3x) & \text{om } 1-3x \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

alltså för $x \leq \frac{1}{3}$ blir $f(x) = 2x + |1-3x| \underset{\text{def.}}{=} 2x + 1 - 3x = -x+1$

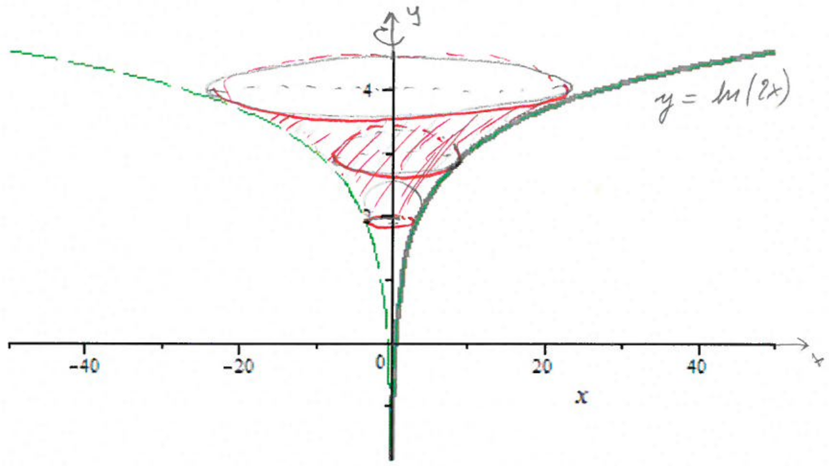
–"— $x \geq \frac{1}{3}$ blir $f(x) = 2x - (1-3x) = 5x - 1$

$\Rightarrow \quad f(x) = 2x + |1-3x| = \begin{cases} 1-x & \text{då } x \leq \frac{1}{3} \\ 5x-1 & \text{då } x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

Svar: $f(x) = 2x + |1-3x| = \begin{cases} 1-x & \text{då } x \leq \frac{1}{3} \\ 5x-1 & \text{då } x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$



5.



$$V_y = \int_2^4 \pi x^2 \, dy =$$

där $y = \ln(2x) \Leftrightarrow e^y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^y$

$$= \pi \int_2^4 \left(\tfrac{1}{2}e^y\right)^2 dy = \pi \int_2^4 \frac{1}{4} e^{2y} dy = \frac{\pi}{4} \int_2^4 e^{2y} dy = \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_2^4 = \frac{\pi}{8}\left[e^{2y}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(e^8 - e^4\right) = \frac{\pi e^4}{8}\left(e^4 - 1\right)$$

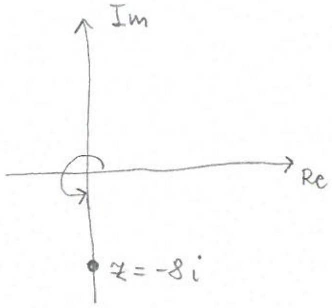
<u>Svar</u>: $V = \frac{\pi e^4}{8}(e^4 - 1)$ ve $\left(\text{eller } V = \frac{\pi}{8}(e^8 - e^4) \text{ ve}\right)$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

6.

$z^3 = -8i$



$\arg(-8i) = \frac{3\pi}{2}$ och $|z| = 8$

då $-8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) =$

$= 8e^{\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)i}$

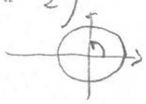
Anta att $z = re^{i\varphi}$ då ekv. $z^3 = -8i$ ges av

$\left(re^{i\varphi}\right)^3 = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)i}$ där $n = 0, 1, 2$

$\Leftrightarrow \quad r^3 e^{3i\varphi} = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)i} \quad \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$

för $r = 2$ och $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$ blir $\boxed{z = 2e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n\right)i} \text{ där } n = 0, 1, 2}$

för $n = 0$ blir $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i\cdot 1) = \underline{\underline{2i}}$



för $n = 1$ blir $z_2 = 2e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)i} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{3} - i}}$

för $n = 2$ blir $z_3 = 2e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)i} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{3} - i}}$

<u>Svar</u>: $z_1 = 2i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = \sqrt{3} - i$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

7.

$$y = \frac{x^2 - 2}{x+1}$$

1. $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ (eller $D_f: x \neq -1$)

$\Rightarrow$ $x = -1$ är en lodrät asymptot

2. söka funktionens nollställen, $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
Alltså funktionen skär x-axeln i punkterna $P_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ och $P_2 = (0, \sqrt{2})$

3. $$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2-2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1^2 + 2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 1}{(x+1)^2}$$

Tips! $\rightsquigarrow$ du skall alltid börja med att försöka faktorisera nämnaren!!!

4. $f'(x) = 0$ ger inga reella lösningar! Observera här att täljaren är alltid positiv och det minsta värde den kan anta är $\underline{1}$. (här tackar man att man kan kvadratkomplettera .
Vidare kan vi se att både täljaren som nämnaren är alltid positiva för x från D_f,
$\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ för alla $x \in D_f$

5.

x		-1	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

OBS! från (4) framgår att funktionen har ingen lokal maximi- eller minimipunkt och ingen terasspunkt!!!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

fort. 7

6. dags att ta reda på hur funktionen uppför sig i närheten av $x=-1$ och då $x \to \pm\infty$

- $$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}^{\text{täljaren går mot }(-1)}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}} = +\infty$$

  vi närmar oss $x=-1$ från vänster sida av tallinjen alltså t.ex. $-1,00000001$

- $$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^2-2}^{\to(-1)}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}} = -\infty$$

  vi närmar oss $x=-1$ från höger sida av tallinjen alltså t.ex. $-0,9999999\ldots$

- $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(x-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

  bryt ut den dominerande faktorn $\underline{\underline{x}}$

  $$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(x-\underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0}\right)}{\left(1+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1} = \lim_{x\to +\infty} (x) = +\infty$$

  ger ingen <u>horisontell</u> asymptot

- $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x) = -\infty$$ ger ingen <u>horisontell</u> asymptot

  använd senaste omskrivning

alltså ⇝

x		-1	
$f'(x)$	$+$	|	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	|	$-\infty \nearrow +\infty$

vänd

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

... finns det sneda asymptoter?

7. $y = kx + m$ där $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ och $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$

Sök k:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{(x+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

bryt dominerande faktorn (x^2)

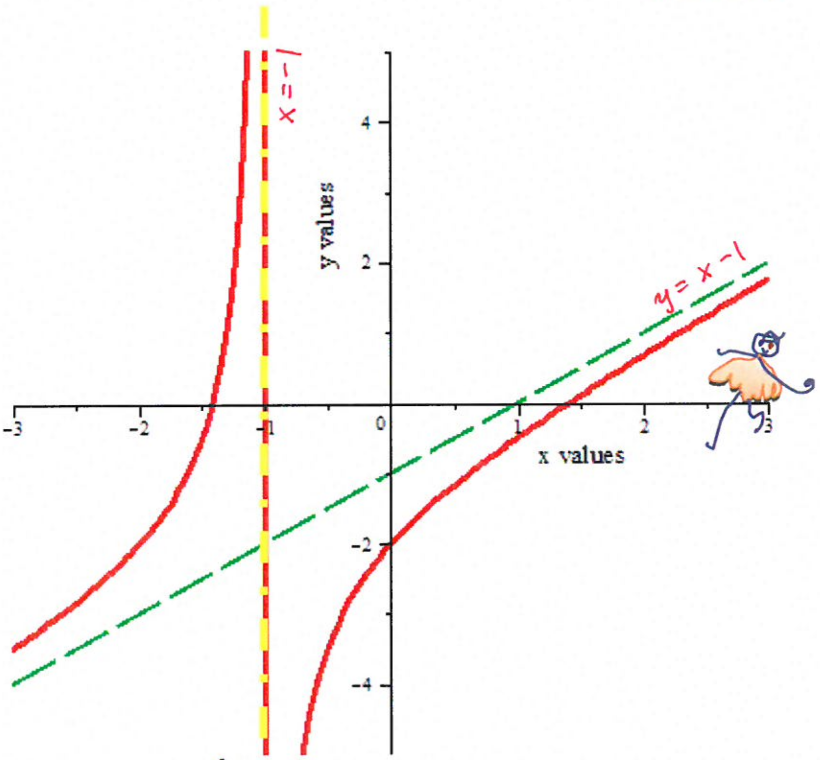
kan läggas efteråt här, ty samma gränsvärde fås för $x \to -\infty$

för $k = 1$

$$m = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2}{x+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} - 2 - x(x+1)}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(-2-x)}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\left(\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}+1\right)}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{-1}{1} = -1$$

för $k = 1$ och $m = -1$ fås en sned asymptot $y = x - 1$



$y = \frac{x^2-2}{x+1}$ and $y = x - 1$ and $x = -1$.

Svar: funktionen har inga extrempunkter, den har en lodrät asymptot $x = -1$ och en sned asymptot $y = x - 1$.

OBS! (du kan hitta den sneda asymptoten genom att utföra polynomdivision) se nästa sida för tips!

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

alternativ

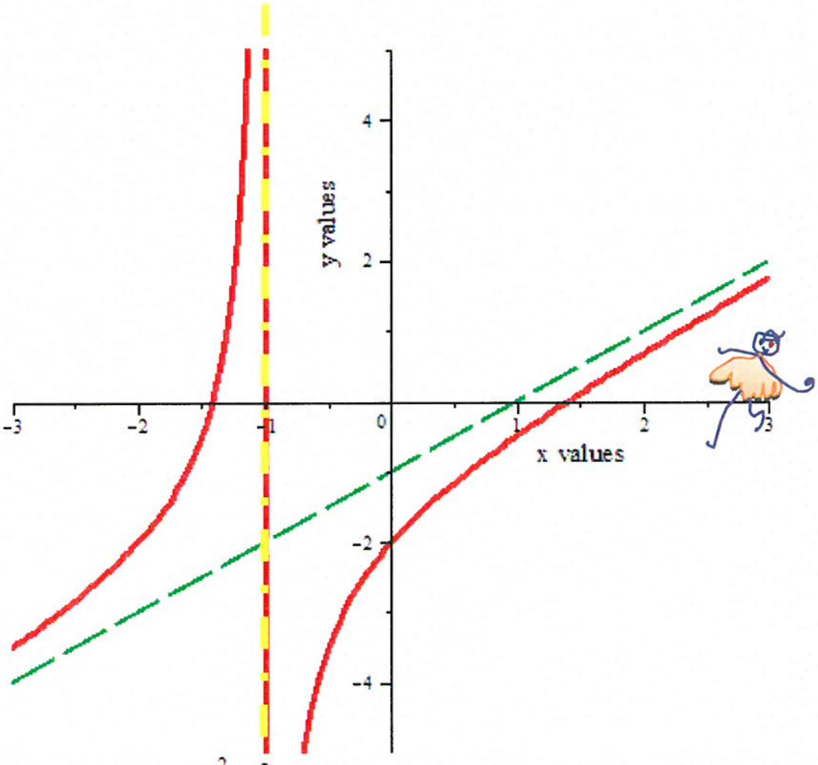
7. sök sned asymptot genom att utföra polynomdivision!

$$\frac{x^2-2}{x+1}$$

$$\begin{array}{l} \quad x-1 \;\rightarrow \text{kvot} \\ \hline x^2-2 \;\; \big| \; x+1 \\ -(x^2+x) \\ \hline \quad -x-2 \\ -(-x-1) \\ \hline \quad\quad -1 \;\rightarrow \text{rest} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-2}{x+1} = (x-1) + \frac{-1}{x+1}, \text{ ty}$$

$\frac{-1}{x+1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ blir $y = x-1$ en sned asymptot då $x \to \pm\infty$



$y = \frac{x^2-2}{x+1}$ and $y = x-1$ and $x = -1$.