Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**



# Facit/lösningsförslag
2015-04-09

1. För det komplexa talet $z$ gäller att $|z| = 2$ och $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$.

a) Skriv $z$ i formen $x + iy$ och markera $z$ i ett komplext talplan.

b) Markera talet $(-2iz)$ i samma talplan.

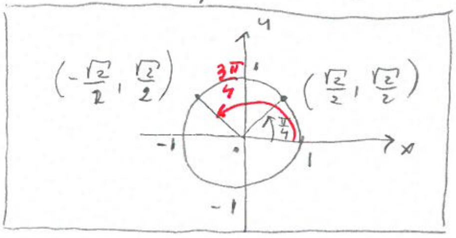
c) Ange argument och absolutbelopp för talet $(-2iz)$.

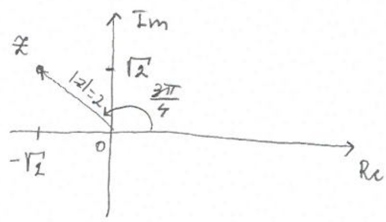
## Lösning:

a) $z = |z| \cdot \left(\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)\right)$

alltså för $|z| = 2$ och $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ blir

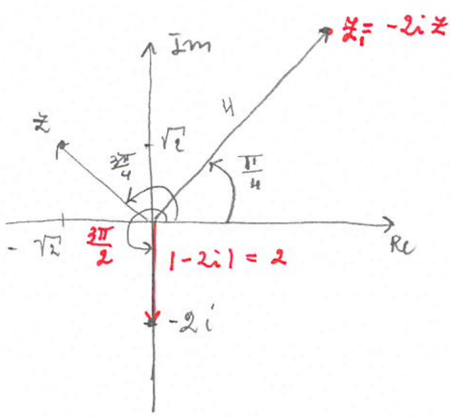
$$z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$$




Svar: $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

b)




vid multiplikation av två komplexa tal, argumenten adderas och avstånden multipliceras!

c) $\arg(-2iz) = \arg(z) + \arg(-2i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}$

tar vi bort "perioden" kommer $\arg(-2iz) = \frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4}$

$|-2iz| = |-2i| \cdot |z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} \cdot |z| = \left\{ \begin{array}{l} \text{för} \\ |z| = 2 \end{array} \right\} = \sqrt{4} \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$

Svar:
$\arg(-2iz) = \frac{\pi}{4}$
$|-2iz| = 4$

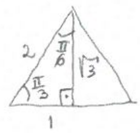
2.

a) Lös fullständigt ekvationen $2\sin(2x+\pi/3)=1$ i intervallet $0 \le x \le 2\pi$. Svara exakt. (2p)

b) Man vet att $\sin u = \dfrac{3}{5}$ och att vinkeln $u$ ligger mellan $0°$ och $90°$. Bestäm det exakta värdet för $\sin(u+60°)$. (1p)

**Lösning:** a)

$$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \iff \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$




$$\iff \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n \end{cases} \text{ där } n\in\mathbb{Z} \iff \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi n \\ 2x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi n \end{cases} \text{ där } n\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} 2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \\ 2x=\frac{3\pi}{6}+2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+\pi n \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n \end{cases} \text{ där } n\in\mathbb{Z}$$

vi söker $0 \le x \le 2\pi$, alltså för

• $n=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12} \notin [0,2\pi] \\ x=\frac{\pi}{4} \in [0,2\pi] \end{cases}$

• $n=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{11\pi}{12} \in [0,2\pi] \\ x=\frac{5\pi}{4} \in [0,2\pi] \end{cases}$

• $n=2 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+2\pi \iff x=\frac{23\pi}{12} \in [0,2\pi] \\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi \notin [0,2\pi] \end{cases}$

<u>svar</u>: $\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{4}, \quad x_2=\frac{5\pi}{4}, \quad x_3=\frac{11\pi}{12} \\ x_4=\frac{23\pi}{12} \end{cases}$

2. uppgift 2

a) Lös fullständigt ekvationen $2\sin(2x+\pi/3)=1$ i intervallet $0 \le x \le 2\pi$. Svara exakt. (2p)

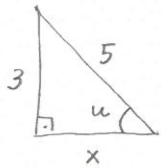
sid 3

b) Man vet att $\sin u = \dfrac{3}{5}$ och att vinkeln $u$ ligger mellan $0^\circ$ och $90^\circ$. Bestäm det exakta värdet för $\sin(u+60^\circ)$. (1p)

**Lösning:**

b)

$\sin u = \frac{3}{5}$ och $0^\circ < u < 90^\circ \Rightarrow \cos u > 0$, vinkel ligger i första kvadranten!



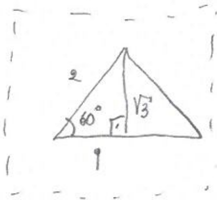

$\Rightarrow x^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow x = \pm 4$, $x > 0$

$\Rightarrow x = 4$

för $x = 4$ blir $\cos u = \frac{4}{5}$

Då blir

$\sin(u+60^\circ) = \sin u \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos u =$




$$= \begin{bmatrix} \sin u = \frac{3}{5} \\ \cos u = \frac{4}{5} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

<u>svar</u>: $\sin(u+60^\circ) = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$ då $\sin u = \dfrac{3}{5}$.

3.

a) Beräkna integralen $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$. Svaret ges på förenklad exakt form.

b) Beräkna integralen $\int_0^{1/3}\left(\cos(\pi x)+\frac{\pi}{3}\right)dx$. Svaret ges på förenklad exakt form.

c) Beräkna integralen $\int (\sin x)^2\, dx$.

**Lösning:**

a) $$\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_1^e \left(\frac{x}{x^2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}+x^{\frac{1}{2}-2}\right)dx =$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left[\ln|x| + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^e = \left[\ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^e =$$

$$= \left[\ln|x| + \frac{\frac{1}{x^{1/2}}\cdot(-2)}{-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(-\cancel{2})}\right]_1^e = \left[\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^e = \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{2}{\sqrt{e}} - \left(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{2}{\sqrt{1}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} + 2 = 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$$

<u>svar</u>: $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$

3.

a) Beräkna integralen $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$. Svaret ges på förenklad exakt form.

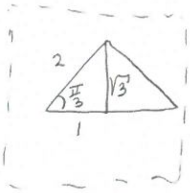
b) Beräkna integralen $\int_0^{1/3} \left(\cos(\pi x)+\frac{\pi}{3}\right)dx$. Svaret ges på förenklad exakt form.

c) Beräkna integralen $\int (\sin x)^2\,dx$.

**Lösning:**

b) $$\int_0^{1/3}\left(\cos\pi x+\frac{\pi}{3}\right)dx = \left[\frac{\sin\pi x}{\pi}+\frac{\pi}{3}x\right]_0^{1/3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\pi}+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{3}-\Big(\underbrace{\frac{\sin 0}{\pi}}_{=0}+\underbrace{\frac{\pi}{3}\cdot 0}_{=0}\Big)=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi}+\frac{\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{\pi}{9}$$




svar: $\int_0^{1/3}\left(\cos\pi x+\frac{\pi}{3}\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{\pi}{9}$

c) $$\int(\sin x)^2dx=\int\sin^2x\,dx=\left[\begin{array}{c}\cos 2x=1-2\sin^2x\\ \Updownarrow\\ \sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}\end{array}\right]=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]+C=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+C$$

svar: $\int(\sin x)^2dx=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+C$

kontroll:

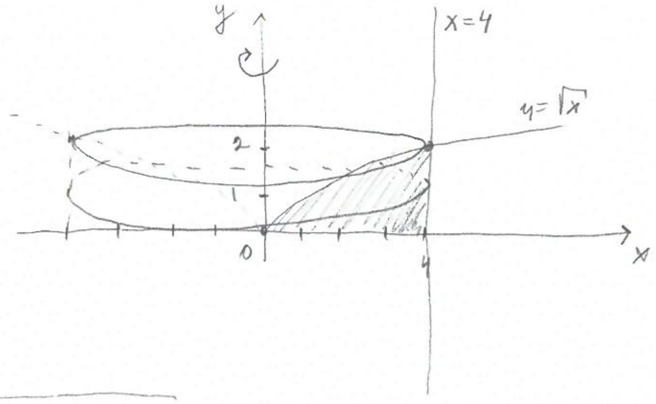
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+C\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\cos 2x\cdot 2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-(1-2\sin^2x)\right)=\frac{1}{2}(1-1+2\sin^2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin^2x=\underline{\underline{\sin^2x}}$$

4. Ett område i första kvadranten begränsas av $x$-axeln, linjen $x = 4$ och kurvan $y = \sqrt{x}$. Låt området rotera kring $y$-axeln. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. Svara exakt.

**Lösning:**




$$\boxed{V = V_{cylinder} - V_{rot}}$$

där $V_{cylinder} = \pi r^2 \cdot h = \left\{ \begin{array}{l} r = 4 \\ h = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right\} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = \pi \cdot 16 \cdot 2 = 32\pi$ v.e.

$V_{rot} = \left[ \begin{array}{l} \text{rotationskroppen} \\ \text{som} \\ \text{uppkommer då } y = \sqrt{x} \\ \text{roteras kring } y\text{-axeln} \end{array} \right] = \int_0^{\sqrt{4}} \pi x^2 dy = \pi \int_0^2 x^2 dy =$

$= \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y^2 = x \\ y^4 = x^2 \end{array} \right\} = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \left[ \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{\pi}{5} \left[ y^5 \right]_0^2 = \frac{\pi}{5} \left( 2^5 - 0^5 \right) =$

$= \frac{\pi}{5} \cdot 32 = \frac{32\pi}{5}$ v.e.

Den sökta volymen blir då $V = 32\pi - \frac{32\pi}{5} = 32\pi \left( 1 - \frac{1}{5} \right) =$

$= 32\pi \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 32}{5} \pi = \frac{128\pi}{5}$ v.e.

Svar: $V = \frac{128\pi}{5}$ v.e.

5. Leonard Euler, en schweizisk matematiker på 1700-talet, visade att

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x \quad \text{och} \quad \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x$$

Visa att formlerna gäller.

**Lösning:**

• Vi visar först att $\boxed{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x}$

$$VL=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\left\{\begin{array}{l} e^{ix}=\cos x+i\sin x \\ e^{-ix}=e^{i(-x)}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)+(\cos x-i\sin x)}{2}=\frac{\cos x+\cancel{i\sin x}+\cos x-\cancel{i\sin x}}{2}=\frac{2\cos x}{2}=\cos x=HL$$

VSSV

• på motsvarande sätt visas att $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x$

$$VL=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{\cos x+i\sin x-(\cos x-i\sin x)}{2i}=$$

$$=\frac{\cancel{\cos x}+i\sin x-\cancel{\cos x}+i\sin x}{2i}=\frac{\cancel{2i}\sin x}{\cancel{2i}}=\sin x=HL$$

VSSV

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

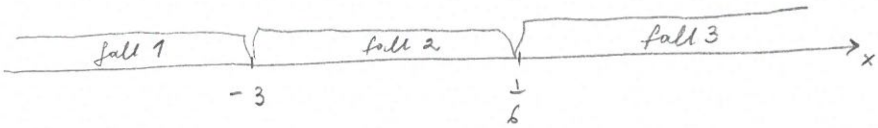


6. För vilka x gäller $|x+3|-\left|2x-\frac{1}{3}\right| \leq 2$ ?

**Lösning:**

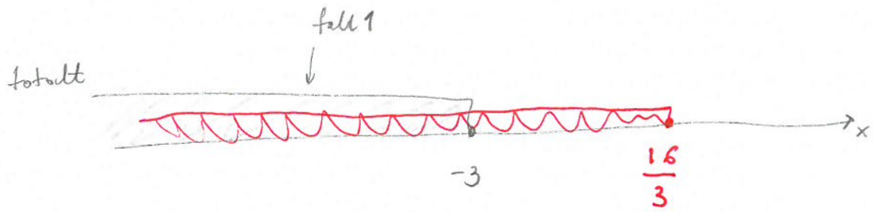
Def. $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{då } x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{då } x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \end{cases}$

Def. $\left|2x-\frac{1}{3}\right| = \begin{cases} 2x-\frac{1}{3} & \text{då } 2x-\frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3}-2x & \text{då } 2x-\frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6} \end{cases}$




• fall 1 $x \leq -3$ ger

$|x+3|-\left|2x-\frac{1}{3}\right| \leq 2 \Leftrightarrow -x-3-\frac{1}{3}+2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2+3+\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{16}{3}$

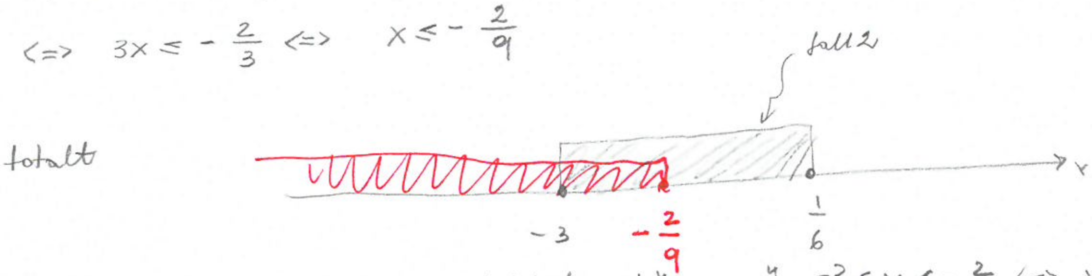



alltså alla x som uppfyller olikheter är $x \leq -3$

• fall 2, $-3 \leq x \leq \frac{1}{6}$ ger

$|x+3|-\left|2x-\frac{1}{3}\right| \leq 2 \Leftrightarrow x+3-\left(\frac{1}{3}-2x\right) \leq 2 \Leftrightarrow 3x \leq 2-3+\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x \leq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{9}$




alla x som uppfyller olikheten här är $-3 \leq x \leq -\frac{2}{9} \Leftrightarrow x \in \left[-3, -\frac{2}{9}\right]$

vänd →

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska



6. För vilka x gäller $|x+3|-\left|2x-\frac{1}{3}\right| \leq 2$ ?

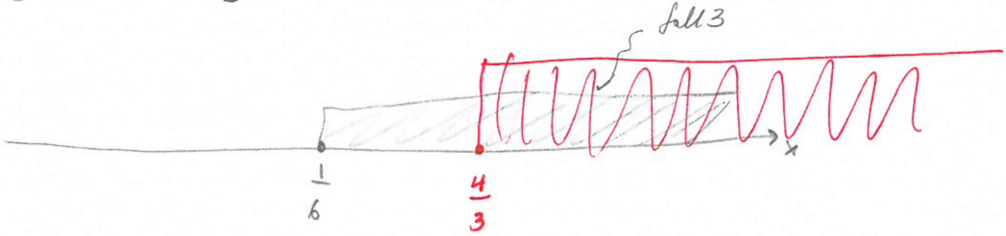
**Lösning:** fortsättning

• fall 3, $x \geqslant \frac{1}{6}$ ger

$|x+3| - \left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq 2 \iff x+3-\left(2x-\frac{1}{3}\right) \leq 2 \iff -x \leq 2-3-\frac{1}{3} \iff$

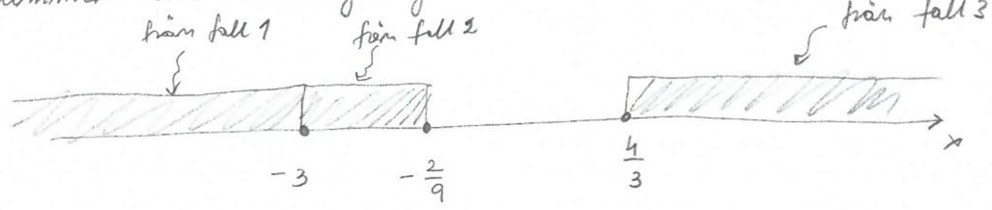
$\iff -x \leq -\frac{4}{3} \iff x \geqslant \frac{4}{3}$ (OBS! $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$)

totalt




alla x som uppfyller olikheten här är $x \geqslant \frac{4}{3}$

• grafiskt kommer alla lösningar ges av




svar: $x \leq -\frac{2}{9}$ eller $x \geqslant \frac{4}{3}$

eller $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska



7. Om funktionen $f$ och $g$ vet man att

- $f(0) = 4$ och $f'(x) = 3 - 6e^{-2x}$
- $g'(x) = f'(x)$
- kurvorna $y = g(x)$ och $y = f(x)$ innesluter tillsammans med linjerna $x = -1$ och $x = 4$ ett område med arean 10 areaenheter

Bestäm $g(x)$.

**Lösning:**

ty $f'(x) = 3 - 6e^{-2x}$ blir $f(x) = \int (3 - 6e^{-2x})\,dx = 3x - 6 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} + C =$

$= 3x + 3e^{-2x} + C$

då $\begin{cases} f(x) = 3x + 3e^{-2x} + C \\ f(0) = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0 + 3e^{-2 \cdot 0} + C = 4 \Rightarrow 3e^{0} + C = 4 \Leftrightarrow$

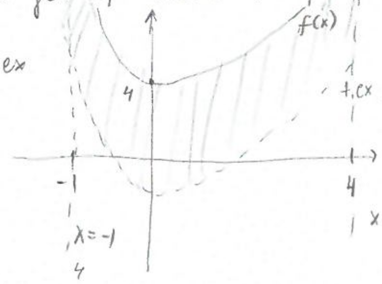
$\Leftrightarrow C = 4 - 3 \Leftrightarrow \underline{C = 1}$

alltså $\boxed{f(x) = 3x + 3e^{-2x} + 1}$

$g'(x) = f'(x) \Rightarrow g(x) = 3x + 3e^{-2x} + D$

(OBS! kurvorna $f(x)$ och $g(x)$ har precis "samma" utseende, dock är de förskjutna längs $y$-axeln i förhållande till varandra)

t. ex




t.ex $g(x)$ → här har ni inte konstanten ☺

$\left\{ \begin{array}{c} \text{om} \\ D < 1 \end{array} \right\}$ så ligger $f(x)$ ovanför $g(x)$

blir $A = \int_{-1}^{4} (f(x) - g(x)) = \int_{-1}^{4} \left(\cancel{3x} + \cancel{3e^{-2x}} + 1 - \cancel{3x} - \cancel{3e^{-2x}} - D\right) dx = 10$ a.e.

$\Leftrightarrow \int_{-1}^{4} (1 - D)\,dx = 10 \Leftrightarrow \left[(1 - D)x\right]_{-1}^{4} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - D) \cdot 4 - (1 - D)(-1) = 10 \Leftrightarrow 4 - 4D + 1 - D = 10 \Leftrightarrow -5D = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{D = -1}}$

7. Om funktionen $f$ och $g$ vet man att

- $f(0)=4$ och $f'(x)=3-6e^{-2x}$
- $g'(x)=f'(x)$
- kurvorna $y=g(x)$ och $y=f(x)$ innesluter tillsammans med linjerna $x=-1$ och $x=4$ ett område med arean 10 areaenheter

Bestäm $g(x)$.

**Lösning:** → fort.

om $D>1$ ligger $g(x)$ ovanför $f(x)$ och då blir

$$A=\int_{-1}^{4}(g(x)-f(x))dx=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{4}\left(\cancel{3x}+\cancel{3e^{-2x}}+D-\cancel{3x}-\cancel{3e^{-2x}}-1\right)dx=10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{4}(D-1)\,dx=10 \Leftrightarrow \left[(D-1)x\right]_{-1}^{4}=10 \Leftrightarrow (D-1)\cdot 4-(D-1)\cdot(-1)=10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4D-4+D-1=10 \Leftrightarrow 5D=15 \Leftrightarrow \underline{\underline{D=3}}$$

Svar: $g(x)=3x+3e^{-2x}+3$ eller $g(x)=3x+3e^{-2x}-1$