Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

Facit/lösningsförslag
2015-06-04

1.

a) För vilket värde på det reella talet t blir $z=(1+t)\cdot(1+i)-t\cdot(1-2i)$ reellt? (1p)

b) Hur förändras argument och absolutbelopp för ett komplext tal z om det multipliceras med $\frac{1}{2}i$. (2p)

Lösning:

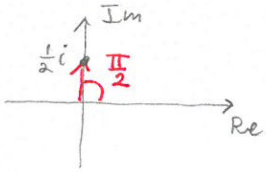
a) $z=(1+i)\cdot(1+i)-t(1-2i)=1+i+\cancel{t}+ti-\cancel{t}+2ti=$

$=1+i+ti+2ti=1+i+3ti=1+i(1+3t)$

z är reellt om $\operatorname{Im}(z)=0 \Rightarrow 1+3t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$

Svar: För $t=-\frac{1}{3}$ blir z reellt.

b) $w=\frac{1}{2}i$



$\arg w=\arg\left(\frac{1}{2}i\right)=\frac{\pi}{2}$

$|w|=\left|\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

Alltså gäller $\left|z\cdot\frac{1}{2}i\right|=|z|\cdot\left|\frac{1}{2}i\right|=|z|\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|z|$

och

$\arg\left(z\cdot\frac{1}{2}i\right)=\arg z+\arg\left(\frac{1}{2}i\right)=\arg z+\frac{\pi}{2}$

Svar: Multiplikation med $\frac{1}{2}i$ innebär alltså att absolutbeloppet multipliceras med $\frac{1}{2}$ och att argumentet ökar med $\frac{\pi}{2}$. Geometriskt betyder det att punkten z vrids $90°$ i positiv led och avståndet från origo halveras.

2.

a) Lös ekvationen $\sin(5x) = \sin(2x)$. Lämna ett exakt svar i radianer. (2p)

b) Ekvationen $\sin x - \cos x = 0$ har en rot i intervallet $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$. Vilken är roten? Ange exakt svar. (1p)

Lösning:

a) $\sin(5x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2x + 2\pi n \\ 5x = \pi - 2x + 2\pi n \end{cases}$, där $n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\pi n \\ 7x = \pi + 2\pi n \end{cases}$, där $n \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} n \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} n \end{cases}$ där $n \in \mathbb{Z}$

Svar: $x = \frac{2\pi n}{3}$ eller $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}$ där $n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} \Leftrightarrow$

OBS! att det är inget risk att $\cos x$ kan bli noll. Varför?

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$

för $n = 0$ blir $x = \frac{\pi}{4}$ och ligger ej i intervallet $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$

för $n = 1$ blir $x = \frac{\pi}{4} + \pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ som är en rotlösning i intervallet $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{4\pi}{4} \le x \le \frac{6\pi}{4}$

Svar: $x = \frac{5\pi}{4}$

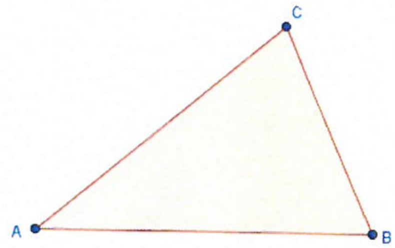
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

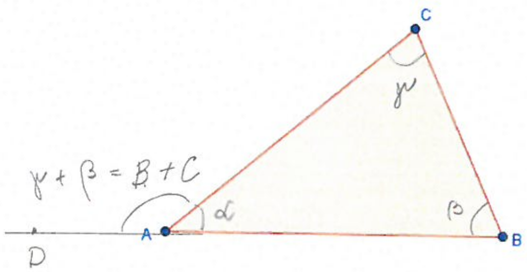
3. I den spetsvinkliga triangeln ABC är $\sin A = \frac{3}{5}$

a) Bestäm värdet av $\sin(B+C)$

b) Bestäm värdet av $\cos(B+C)$



Lösning:

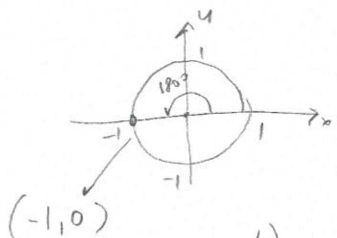


vinkeln DAC är en yttre vinkeln och är summan av respektive vinkel B och C.

a) då blir $B + C + A = 180° \Leftrightarrow B + C = 180° - A$

vidare $\sin(B+C) = \sin(180° - A) = \sin 180° \cos A - \sin A \cos 180° =$

$= 0 \cdot \cos A - \sin A \cdot (-1) = \sin A = \frac{3}{5}$



svar: $\sin(B+C) = \frac{3}{5}$

b) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A \Leftrightarrow \left| \sin A = \frac{3}{5} \right|$

$\Leftrightarrow \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 A = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos A = \pm \frac{4}{5}$ eftersom $0° < A < 90°$ (spetsig) så medför det att $\cos A > 0$ alltså $\cos A = \frac{4}{5}$

vidare $\cos(B+C) = \cos(180° - A) = \cos 180° \cos A + \sin 180° \sin A = -\cos A + 0 \cdot \sin A = -\cos A$

$\Rightarrow \cos(B+C) = -\frac{4}{5}$ svar: $\cos(B+C) = -\frac{4}{5}$

4. Beskriv funktionen $f(x) = 3x - |-2x + 1|$ utan absolutbelopp och rita kurvan $y = f(x)$. Ange tydligt svar.

Lösning:

$$|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{om} \quad -2x+1 \geq 0 \iff -2x \geq -1 \iff x \leq \frac{1}{2} \\ -(-2x+1) & \text{om} \quad -2x+1 \leq 0 \iff -2x \leq -1 \iff x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

fall 1, $x \leq \frac{1}{2}$ ger att

$$f(x) = 3x - (-2x+1) = 3x + 2x - 1 = 5x - 1$$

fall 2, $x \geq \frac{1}{2}$ ger att

$$f(x) = 3x + (-2x+1) = 3x - 2x + 1 = x + 1$$

- för respektive linjestycke gäller följande

  då $f(x) = 5x - 1$ för $x \leq \frac{1}{2}$

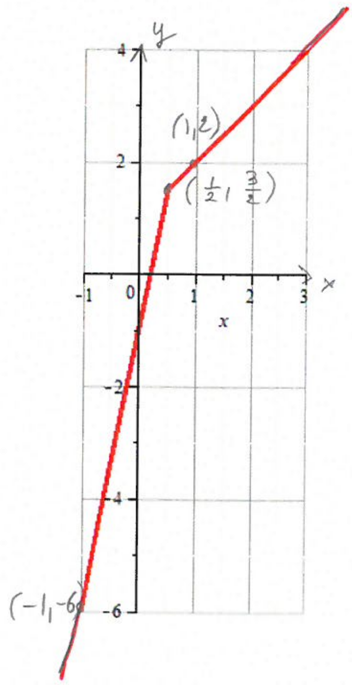
  blir $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ ger $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

  och t. ex. $f(-1) = -5 - 1 = -6$ ger $P_2 = (-1, -6)$

- då $f(x) = x + 1$ för $x \geq \frac{1}{2}$

  blir $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ger $P_3 = (\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$

och t. ex. $f(1) = 1 + 1 = 2$ ger $P_4 = (1, 2)$



Svar:

$$f(x) = 3x - |-2x+1| = \begin{cases} 5x - 1 & \text{då} \quad x \leq \frac{1}{2} \\ x + 1 & \text{då} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

5. Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x-koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \le x \le 4$.

Lösning:

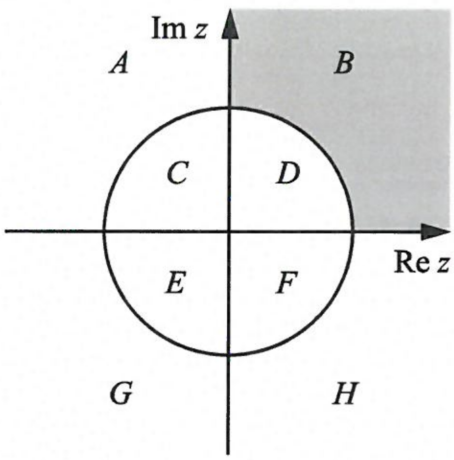
$$f(x) = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \quad ger\ att\quad f'(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\left(x - \frac{4}{9}\right)} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}x}\, dx =$$

$$\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} = 8 - 1 = 7$$

Svar: $L = 7$ l.e.

6. I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med *A, B, C, D, E, F, G* och *H*. Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena. Bestäm i vilket eller vilka områden talet $\frac{1}{z}$ kan ligga om z ligger i B.



Lösning:

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

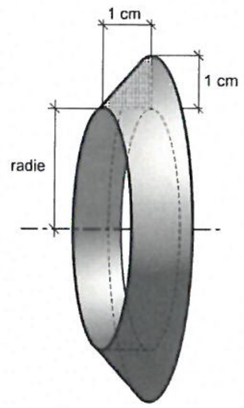
$\bar{z}$ och därmed $\frac{1}{z}$ ligger i fjärde kvadranten eftersom z ligger i första kvadranten.

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{|1|}{|z|}<1 \quad \text{eftersom } |z|>1$$

Beloppet av $\frac{1}{z}$ är mindre än 1 och $\frac{1}{z}$ ligger alltså innanför enhetscirkeln.

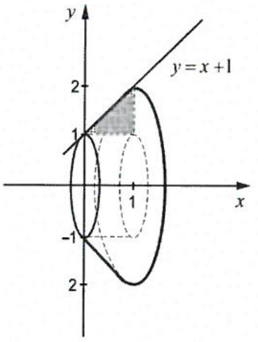
$\frac{1}{z}$ ligger i område *F*.

Svar: $\frac{1}{z}$ ligger i område *F*.

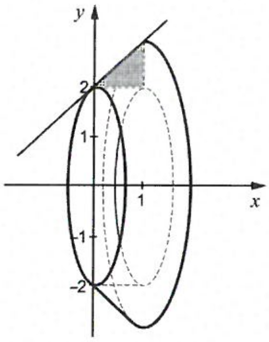


7. Ett företag tillverkar tätningsringar för rör i olika storlekar. Alla ringar har både höjden och tjockleken 1 cm, men kan ha olika radier (se figur 1).

Tätningsringar kan representeras matematiskt genom rotation av trianglar runt x-axeln. I figur 2 och 3 ser du exempel på detta. I dessa figurer har ringarna radierna 1 cm respektive 2 cm.



Figur 2



Figur 3

Hur förändras volym om en tätningsring får 1 cm större inre radie?

Lösning:

En ring med radie r representeras av den rotationskropp som uppkommer då

linjen $y = x + r$ roterar runt x-axeln. Volymen för ringen med inre radie r:

$$V_r = \pi\int_0^1 ((x+r)^2 - r^2)\,dx = \pi\int_0^1 (x^2 + 2xr + r^2 - r^2)\,dx = \pi\int_0^1 (x^2 + 2xr)\,dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} + rx^2\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} + r\right)$$

Volymen för en ring med inre radie $r + 1$ blir då $V_{r+1} = \pi\left(\frac{1}{3} + r + 1\right)$

Skillnaden i volym mellan dessa två ringar blir

$$V_{r+1} - V_r = \pi\left(\frac{1}{3} + r + 1\right) - \pi\left(\frac{1}{3} + r\right) = \pi$$

Svar: En tätningsring som får 1 cm större inre radie får π cm^3 större volym.