Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

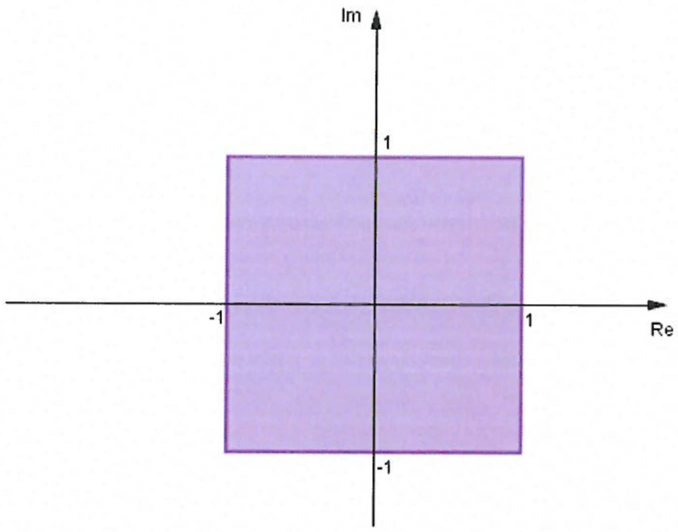
Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

Facit/lösningsförslag
2016-03-16

1.

a) Åskådliggör i det komplexa talplanet de punkter för vilka

$$-1 \leq Re z \leq 1 \quad \text{och} \quad -1 \leq Im z \leq 1$$



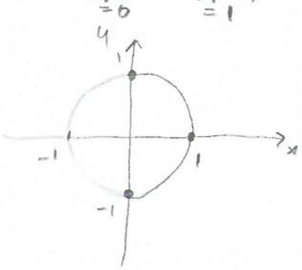
Svar: Se bilden

b) Skriv talet $e^{2\pi i} + 2\cdot e^{\frac{3\pi i}{2}} + 3\cdot e^{\pi i} + 4e^{\frac{\pi i}{2}} - e^{3\pi}$ i formen $a+bi$.

Lösning:

$$e^{2\pi i} + 2e^{\frac{3\pi i}{2}} + 3e^{\pi i} + 4e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{3\pi} = (\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + i\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}) + 2(\underbrace{\cos \tfrac{3\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin \tfrac{3\pi}{2}}_{=-1}) + 3(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0}) +$$

$$+4(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1}) - e^{3\pi} = 1 + 0\cdot i + 2(0 + i\cdot(-1)) + 3(-1 + i\cdot 0) + 4(0 + i\cdot 1) - e^{3\pi} =$$



$$= 1 - 2i - 3 + 4i - e^{3\pi} = -2 + 2i - e^{3\pi} = (-2 - e^{3\pi}) + 2i$$

Svar: $e^{2\pi i} + 2e^{\frac{3\pi i}{2}} + 3e^{\pi i} + 4e^{\frac{\pi i}{2}} - e^{3\pi} = (-2 - e^{3\pi}) + 2i$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

2

2. Beskriv funktionen $f(x) = -3x + |3 - 3x|$ utan absolutbelopp och rita kurvan $y = f(x)$.

Lösning:

$$|3-3x| = \begin{cases} 3-3x & \text{om } 3-3x \geq 0 \iff 3 \geq 3x \iff 1 \geq x \iff x \leq 1 \\ -(3-3x) & \text{om } 3-3x < 0 \iff 3 < 3x \iff 1 < x \iff x > 1 \end{cases}$$

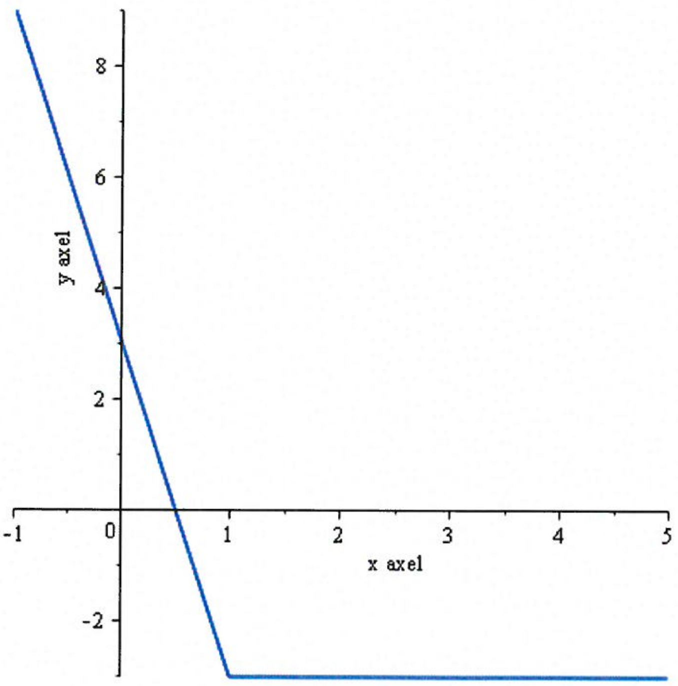
fall 1, $x \leq 1$ ger

$$f(x) = -3x + |3-3x| = -3x + 3 - 3x = -6x + 3$$

fall 2, $x > 1$ ger

$$f(x) = -3x + |3-3x| = -3x - (3-3x) = -\cancel{3x} - 3 + \cancel{3x} = -3$$

alltså $$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{om } x > 1 \\ -6x+3 & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$$



Svar:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{om } x > 1 \\ -6x+3 & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

3

3.

a) Skriv om funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{7}\cos x - \frac{1}{7}\sin x$ på formen $f(x) = C\sin(x+\alpha)$, där $C > 0$.

b) Lös fullständigt ekvationen $\frac{\sqrt{3}}{7}\cos x - \frac{1}{7}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{7}$. Svara exakt.

Lösning: a)

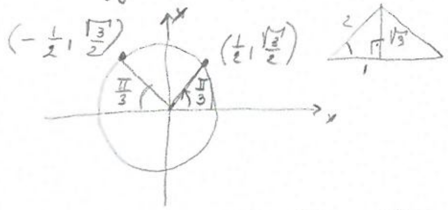
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{7}\cos x - \frac{1}{7}\sin x \\ f(x) = C\sin x\cos\alpha + C\sin\alpha\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\cos\alpha = -\frac{1}{7} \\ C\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

/ kvadrera båda leden i respektive ekvation /

ger $\begin{cases} 1) & C^2\cos^2\alpha = \frac{1}{49} \\ 2) & C^2\sin^2\alpha = \frac{3}{49} \end{cases}$, ekv 1) + ekv 2) ger $C^2(\underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{=1,\ \text{trig. etta}}) = \frac{4}{49} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C^2 = \frac{4}{49} \Leftrightarrow C = \pm\frac{2}{7}$ vi väljer $C > 0$ enligt uppgiften, alltså $C = \frac{2}{7}$.

För $C = \frac{2}{7}$ fås $\begin{cases} \frac{2}{7}\cos\alpha = -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ / ty $\cos\alpha < 0$ och $\sin\alpha > 0$ måste α ligga i andra kvadranten!

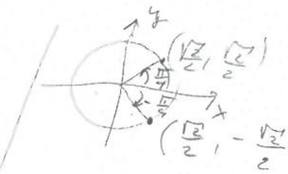


ger $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

alltså för $C = \frac{2}{7}$ och $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ges $f(x)$ av

$f(x) = \frac{2}{7}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

b) $\frac{\sqrt{3}}{7}\cos x - \frac{1}{7}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{7}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \\ x + \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{4\pi}{4} - \frac{7\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} + 2\pi n \\ x = -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi n \\ x = -\frac{9\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} + 2\pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi n \\ x = -\frac{17\pi}{12} + \frac{24\pi}{12} + 2\pi n \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi n \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n \end{cases}$ där $n \in \mathbb{Z}$

Svar: a) $f(x) = \frac{2}{7}\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

b) $\begin{cases} x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi n \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n \end{cases}$ där $n \in \mathbb{Z}$

4. Beräkna inetgralerna

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx$

b) $\int_0^4 \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$

c) $\int \ln x dx$

Lösning 4:

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) - \cos(2\cdot 0)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

b) $$\int_0^4 (1+\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 (1+2\sqrt{x}+x)dx = \int_0^4 \left(1+2x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx = \left[x + 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$= \left[x + \frac{2\sqrt{x}\cdot x}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[x + \frac{4\sqrt{x}\cdot x}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 4 + \frac{4\cdot\sqrt{4}\cdot 4}{3} + \frac{4^2}{2} - 0 =$$

$$= 4 + \frac{32}{3} + 8 = \frac{12}{3} + \frac{32}{3} + \frac{16}{2} = \frac{44}{3} + \frac{24}{3} = \underline{\underline{\frac{68}{3}}}$$

c) $$\int \ln x\,dx = \Big/\text{partiell integration}\Big/ = \begin{bmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln x - \int dx = \underline{\underline{x\ln x - x + C}}$$

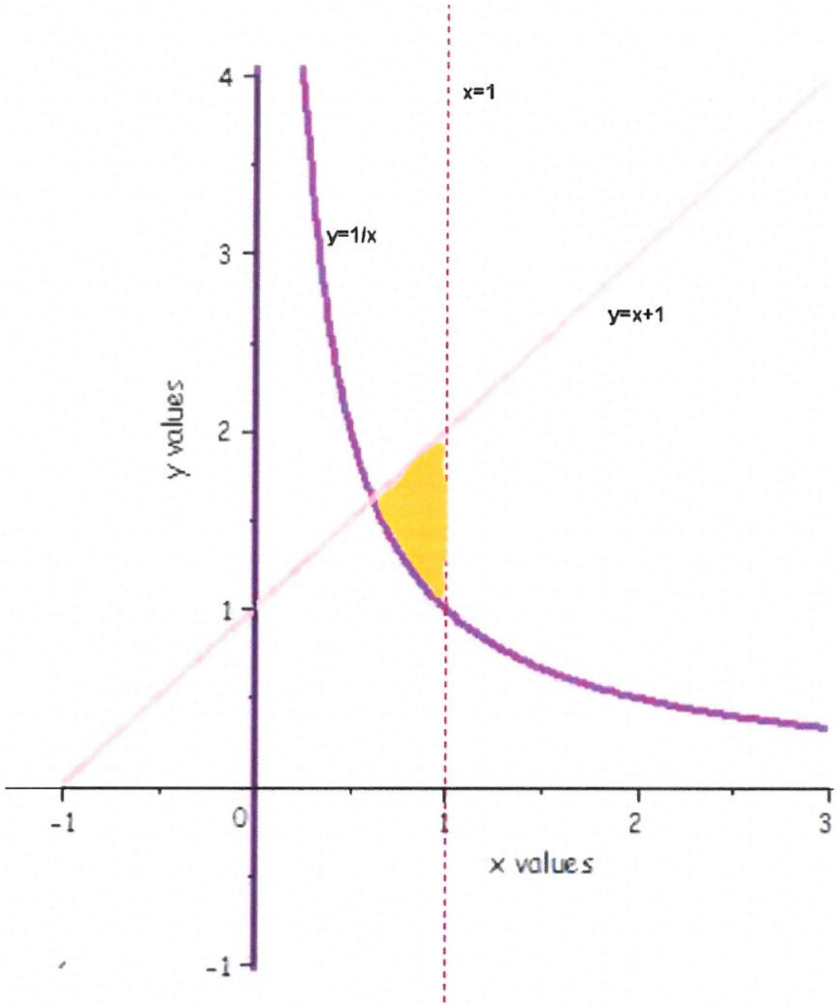
Svar: a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{68}{3}$

c) $x\ln x - x + C$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

5. Kurvorna $y = x + 1$ och $y = \dfrac{1}{x}$ innesluter tillsammans med linjen $x = 1$ ett begränsat område. Rita kurvorna och området och beräkna arean av området.



• Vi söker respektive skärningspunkter $\frac{1}{x} = x+1 \Leftrightarrow 1 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{4}{4} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, ty området ligger i första kvadranten är bara $x > 0$ av intresse, alltså $\underline{\underline{x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

då blir den sökta $A = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} \left(x + 1 - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln|x|\right]_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} =$ / ty $x > 0$ blir $\ln|x| = \ln x$ /

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln x\right]_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + 1 - \underbrace{\ln 1}_{=0} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{2\cdot 4} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) =$$

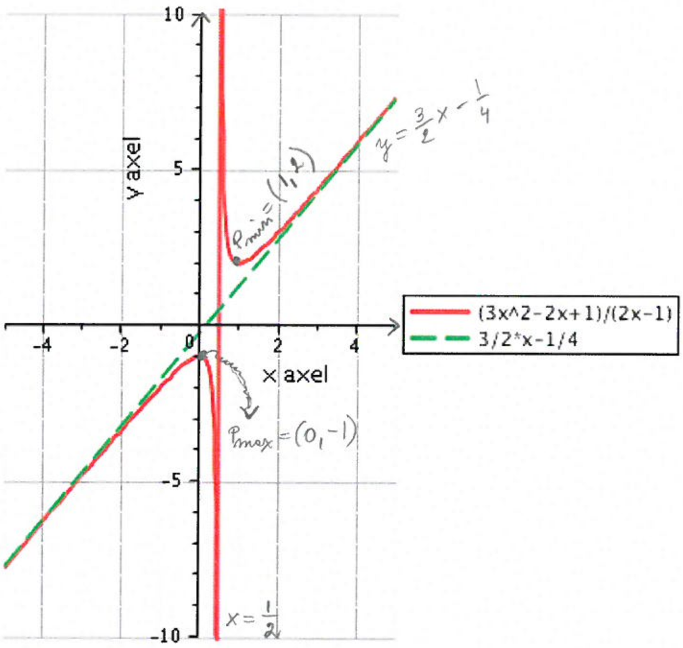
$$= \frac{3}{2} - \left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{8} + \frac{4\sqrt{5}-4}{8} - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{5-2\sqrt{5}+1+4\sqrt{5}-4}{8} - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{6}{4} - \left(\frac{2+2\sqrt{5}}{8} - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = \frac{6}{4} - \frac{(1+\sqrt{5})}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{6-1-\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

<u>svar</u>: $A = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)$ ae

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

6. Gör en noggrann funktionsundersökning av $f(x)$. Rita kurvan $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$ med eventuella asymptoter och lokala maximi- och minipunkter.



- D_f: $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ ger att $\underline{x = \frac{1}{2}}$ är en lodrät asymptot!
- $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{9} \Rightarrow$ $y(x)$ har inga nollställen, alltså grafen till $f(x)$ skär <u>aldrig</u> x-axeln
- $f'(x) = \dfrac{(6x-2)(2x-1) - (3x^2 - 2x + 1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{12x^2 - 6x - \cancel{4x} + \cancel{2} - 6x^2 + \cancel{4x} - \cancel{2}}{(2x-1)^2} =$

  $= \dfrac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2} = \dfrac{6x(x-1)}{(2x-1)^2}$ OBS! att derivatans tecken är helt beroende av täljaren då nämnaren är alltid positiv!
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0}$ eller $\underline{x = 1}$
- teckentabell

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
$6x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f_{max}(0)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	$f_{min}(1)$	$\nearrow$

→ fort. uppgift 6

- $f_{max}(0) = \frac{1}{-1} = -1$ ger $P_{max} = (0, -1)$ lokal maximipunkt

  $f_{min}(1) = \frac{3-2+1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$ ger $P_{min} = (1, 2)$ lokal minimipunkt

- hur uppför sig $f(x)$ i närheten av den lodräta asymptoten $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\frac{3}{4}}{\underbrace{(2x-1)}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{\frac{3}{4}}{\underbrace{(2x-1)}_{\to 0^+}} = +\infty$$

- hur uppför sig $f(x)$ då $x \to \pm\infty$, alltså finns det horisontella asymptoter

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(3x - 2 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{3x}^{\to +\infty} - 2 + \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{\to 0}}{2 - \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{3x}^{\to -\infty} - 2 + \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{\to 0}}{2 - \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}} = -\infty$$

alltså $f(x)$ har <u>inga</u> <u>horisontella asymptoter</u>!

- finns det sneda asymptoter?

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1} = \left/ \begin{array}{c} \text{polynomdivision} \\ \text{ska visas på} \\ \text{ger} \\ \text{tentamen} \ ☺ \end{array} \right/ = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + \overbrace{\frac{\frac{3}{4}}{2x-1}}^{\to\, 0 \text{ då } x \to \pm\infty} \to \underline{\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \text{ då } x \to \pm\infty}$$

Alltså $f(x) = y$ har en sned asymptot $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}}}$

<u>Svar</u>: $f(x) = y$ har en lodrät asymptot $x = \frac{1}{2}$, en sned asymptot $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

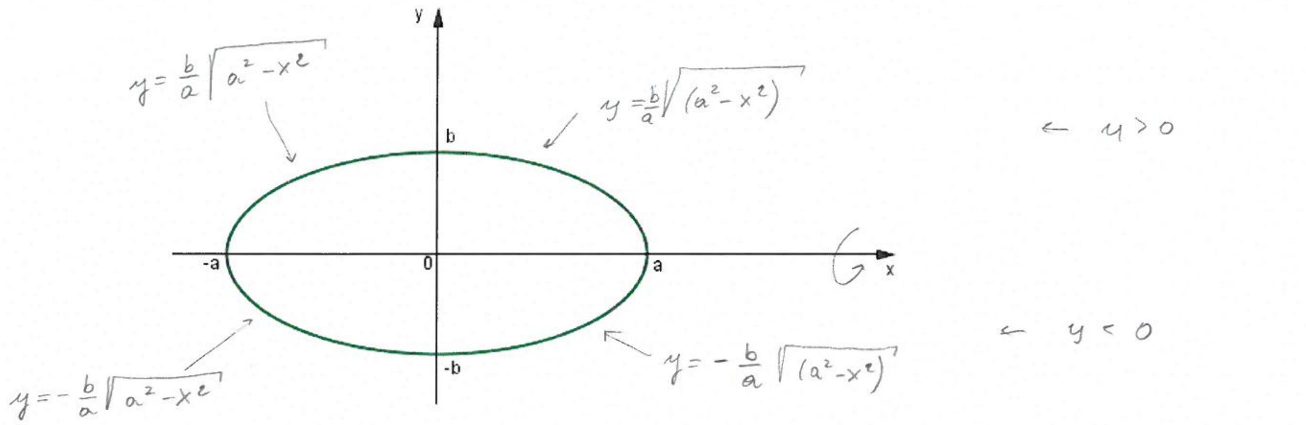
lokal maximipunkt $P_{max} = (0, -1)$

lokal minimipunkt $P_{min} = (1, 2)$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

7. Kurvan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ där a och b är givna tal, har det utseende som figuren visar . **7**



Den yta som alstras när kurvan roterar kring x-axeln begränsar en s k rotationsellipsoid.
Beräkna dennas volym.

Lösning:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \Leftrightarrow \left/ \begin{array}{c} a,b>0 \\ \text{se bilden} \end{array} \right/ \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)} \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = 2\int_0^a \pi y^2\,dx = 2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx =$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a =$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[\frac{3a^2x-x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[\frac{3a^3-a^3}{3}\right] = \frac{2\pi b^2}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{2a^{\cancel{3}}}{3} = \frac{4\pi a b^2}{3} \text{ ve}$$

Svar: $V=\frac{4\pi ab^2}{3}$ ve