Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: BML 401
Provkod: TEN 1

Facit/kortfattade lösningsförslag
2016-04-16

1.

a) Skriv talet $z = (\sqrt{3} - i) \cdot (1+i)^2$ på polär form. 2p

b) Lös ekvationen $3z - i \cdot \bar{z} = 5 - 7i$. 1p

a) $(\sqrt{3} - i)(1+i)^2 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)\left(2e^{\frac{\pi}{2}i}\right) =$

$= 4e^{\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)i} = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$

b)

$3z - i \cdot \bar{z} = 5 - 7i$

sätt $z = a + ib$

$3(a+bi) - i(a - ib) = 5 - 7i$

$3a + 3bi - ia + i^2 b = 5 - 7i$

$(3a - b) + i(3b - a) = 5 - 7i \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 5 \\ 3b - a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \; 3a - b = 5 \\ 2) \; -3a + 9b = -21 \end{cases} \Rightarrow 1) + 2) \quad 8b = -16 \Leftrightarrow \underline{b = -2}$

insättning av $b = -2$ i 1) ger $3a + 2 = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1}}$

för $a = 1$ och $b = -2$ blir $z = 1 - 2i$

Svar: a) $4e^{\frac{\pi}{3}i}$ b) $z = 1 - 2i$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

2. I den punkt där $x = 1$ dras en normal till kurvan $y = \dfrac{2\ln x}{x^2 - 2x + 5}$. Bestäm normalens ekvation.

- Sök $y' = k_t$ för tangenten

$$y' = \frac{2\cdot\frac{1}{x}(x^2-2x+5) - 2\ln x\,(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$y'(1) = \frac{2\cdot 1\cdot(1-2+5) - 2\cdot\overbrace{\ln 1}^{=0}\cdot(2-2)}{(1-2+5)^2} = \frac{2\cdot\cancel{4}^{1}}{4^{\cancel{2}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Sök k_n för normalen:

$$k_n\cdot k_t = -1 \iff k_n = -\frac{1}{k_t} \Rightarrow \left/ k_t = \frac{1}{2} \right/ \Rightarrow k_n = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

- sök y koordinat för punkten med $x=1$ koordinat

$$y(1) = \frac{2\cdot\ln 1}{1-2+5} = /\ln 1 = 0/ = 0$$

- alltså normalen ($*\ y = k_n\cdot x + m$) har lutningen $k_n = -2$ och går genom punkten $P = (1, 0)$.
Insättningen av $k_n = -2$ och P:s koordinaten i $*$ ger

$$0 = -2\cdot 1 + m \iff m = 2$$

För $m = 3$ blir normalens ekvation $y = -2x + 2$

Svar: $y = -2x + 2$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

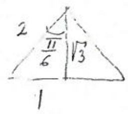
3.

a) Lös ekvationen $2\sin(x/2 - \pi/3) = 1$ i intervallet $0 \le x \le 2\pi$. 1p

b) Lös ekvationen $2\cos^2 x - \sin x = 1$. 2p

a)

$$2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}$$



fyll i själv

$$\iff \ldots \iff \begin{cases} x = \pi + 4\pi n \\ x = \frac{7\pi}{3} + 4\pi n \end{cases} \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}$$

Vi söker nu alla lösningar i intervallet $0 \le x \le 2\pi$. Du kan se att för negativa heltal ligger x utanför intervallet och även för $n \ge 1$ ligger alla x utanför intervallet.

för $n = 0$ får $\begin{cases} x = \pi \in [0, 2\pi] \\ x = \frac{7\pi}{3} \notin [0, 2\pi] \end{cases}$ alltså $x \in \pi$ är den sökta lösningen.

b)

$$2\cos^2 x - \sin x = 1 \iff \Big/ \begin{matrix} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \text{trig. ettan} \end{matrix} \Big/ \iff 2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0 \iff$$

$$\iff 2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \iff 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \iff \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

fyll i!

$$\Rightarrow \Big/ \begin{matrix} \sin x = t \\ \text{där } -1 \le t \le 1 \end{matrix} \Big/ \iff t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \iff \ldots \iff \left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 1) = 0 \iff$$

$$\iff t = \frac{1}{2} \text{ eller } t = -1 \Rightarrow \Big/ t = \sin x \Big/ \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ eller } \sin x = -1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \text{ eller } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{där } n \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \text{ eller } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n \quad \text{där } n \in \mathbb{Z}$$

Svar: a) $x = \pi$ b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ där $n \in \mathbb{Z}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Kurskod: **BML 401**
Provkod: **TEN 1**

4. Lös ekvationen $(z-2i)^3 = -8i$. Rötterna ska ges på formen $x+iy$.

Låt $z - 2i = w \Rightarrow w^3 = -8i$ (gå över till polärframställning av respektive led)

$(re^{i\varphi})^3 = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i}$, där $k = 0,1,2$; där $w = re^{i\varphi}$ och $-8i = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i}$

$\Leftrightarrow \quad r^3 e^{3i\varphi} = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{w = 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right)i} \quad \text{för } k = 0,1,2}$

för $k=0$ är $w_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right) = 2i$

för $k=1$ är $w_1 = \left(\text{fyll i själv}\right) = -\sqrt{3} - i$

för $k=2$ är $w_2 = \left(\text{fyll i själv}\right) = \sqrt{3} - i$

komplettera själv redovisningen

ty $w = z - 2i \Leftrightarrow z = w + 2i \Rightarrow z_1 = w_1 + 2i \Rightarrow z_1 = 4i$

$\Rightarrow z_2 = w_2 + 2i \Rightarrow z_2 = -\sqrt{3} + i$

$\Rightarrow z_3 = w_3 + 2i \Rightarrow z_3 = \sqrt{3} + i$

Svar: $\begin{cases} z_1 = 4i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \\ z_3 = \sqrt{3} + i \end{cases}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

5. För vilka x gäller $\dfrac{|3-x|-x}{x+2} > 1$?

OBS! $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

def. $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{om } 3-x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq x \\ x-3 & \text{om } 3-x < 0 \Leftrightarrow 3 < x \end{cases}$

$|3-x| = 3-x$ fall 1 | $|3-x| = x-3$ fall 2 (vid $x = 3$)

• fall 1, $x \leq 3$ ger följande olikhet

$$\frac{3-x-x}{x+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-2x-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3x}{x+2} > 0$$

fall 1

x		-2		$\frac{1}{3}$		3
$1-3x$	$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$	$-$		$+$		$+$	
$\frac{1-3x}{x+2}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	

alltså $\dfrac{1-3x}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \underline{-2 < x < \frac{1}{3}}$

• fall 2, $x > 3$ ger

$$\frac{\cancel{x}-3-\cancel{x}}{x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-3-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-5-x}{x+2} > 0$$

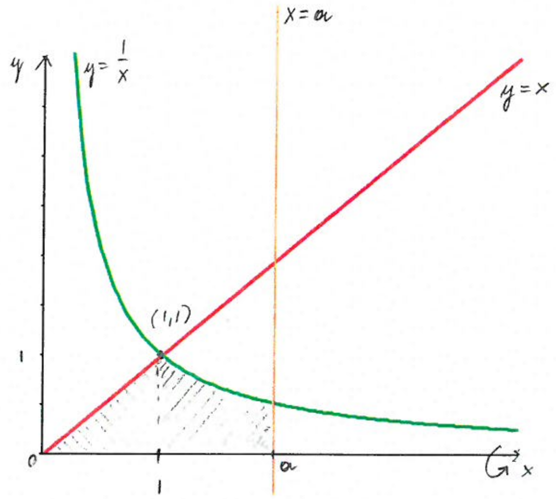
	3	
$-5-x$		$-$
$x+2$		$+$
$\frac{-5-x}{x+2}$		$-$

$\Rightarrow$ att $\dfrac{-5-x}{x+2} > 0$ har inga lösningar då $x > 3$ ty kvoten är <u>negativ</u> för alla $x > 3$.

Svar:

$-2 < x < \frac{1}{3}$

6. Det område, som begränsas av kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, positiva x-axeln och linjerna $y = x$ och $x = a$, där $a > 1$, roterar kring x-axeln. Bestäm a så att volymen av den uppkomna rotationskroppen är π volymenheter.



Skärningspunkten för $y = \frac{1}{x}$ och $y = x$ ges av $\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Ty $x > 0$ skär $y = \frac{1}{x}$ och $y = x$ i punkten där $x = 1$ alltså $\underline{\underline{P = (1,1)}}$

$$V = \int_0^1 \pi x^2\,dx + \int_1^a \pi \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left(\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \pi\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{a} + 1\right) = \pi\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{a}\right) \text{ v.e.}$$

Ty $V = \pi$ får vi $\pi\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{a}\right) = \pi \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \underline{a = 3}$

Svar: $a = 3$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

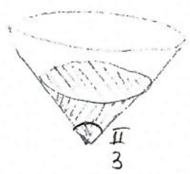
7. En rak cirkulär kon med toppvinkeln $\frac{\pi}{3}$ placeras med spetsen vänd nedåt.

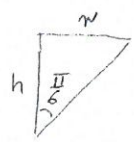
Konen fylls med vatten med hastigheten $0,1\ \frac{m^3}{min}$.

Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är $h = 4\ m$?

Lösning:

Vi har $\frac{dV}{dt} = 0,1$; Vi söker $\frac{dh}{dt}$ vid $h = 4$.





Vattens volym: $(*)\quad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ där både r och h förändras med tiden t.

Toppvinkeln $= \frac{\pi}{3}$ medför att $\frac{r}{h} = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Eftersom vi söker $\frac{dh}{dt}$ eliminerar vi r, dvs substituerar $r = \frac{h}{\sqrt{3}}$ i $(*)$ och får

$$V = \frac{\pi \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi h^3}{9} \quad (**)$$

Till slut deriverar vi $(**)$ med avseende på t och använder kedjeregeln

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\cancel{3}^{1}\pi h^2}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{3}\frac{dh}{dt} \Bigg/ \frac{dV}{dt} = \frac{1}{10} \text{ och } h = 4 \Bigg/ \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{\pi \cdot 4^2}{3} \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10 \cdot \pi \cdot 16} = \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{160\pi}$$

Svar: $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{160\pi}\ \frac{m}{min} \quad \left(\frac{15}{8\pi}\ \frac{cm}{min}\right)$