Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Facit/kortfattade lösningsförslag

2017-03-13

1.

a) Lös fullständigt ekvationen $2\sin^2 x - \cos x = 1$.

$$2\sin^2 x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x = 1$$

$$\text{låt nu} \quad t = \cos x \ \text{ där } -1 \le t \le 1 \quad \Rightarrow$$

$$2\left(1 - t^2\right) - t = 1 \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{eller} \quad t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad t = -1$$

alltså

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{eller} \quad x = \pi + 2\pi n \ \text{ där } \ n \in Z$$

Svar: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ eller $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ eller $x = \pi + 2\pi n$ där $n \in Z$.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

b) Skriv om funktionen $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ på formen $f(x)=C\sin(x+\alpha)$, där $C>0$.

$$\begin{cases} f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x \\ f(x)=C\sin(x+\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x \\ f(x)=C(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1\cdot\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x \\ f(x)=(C\cos\alpha)\cdot\sin x+(C\sin\alpha)\cdot\cos x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=C\cos\alpha \\ -\sqrt{3}=C\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \; *$$

$$\begin{cases} 1^2=(C\cos\alpha)^2 \\ \left(-\sqrt{3}\right)^2=(C\sin\alpha)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=C^2\cos^2\alpha \\ 3=C^2\sin^2\alpha \end{cases}$$

Om ekvationerna adderas ledvis får vi

$4=C^2 \Leftrightarrow C=\pm 2$, vi väljer $C>0$, alltså $C=2$.

Insättning av $C=2$ i * ger $\begin{cases} 1=2\cos\alpha \\ -\sqrt{3}=2\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} ty \quad \sin\alpha<0 \quad och \quad \cos\alpha>0 \\ måste\ vinkeln\ \alpha\ ligga\ i\ fjärde\ kvadranten\ ,här\ kan \end{array}\right] \Rightarrow \alpha=\frac{5\pi}{3}$$

Summa summarum, för $C=2$ och $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$ kan vi skriva om

$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x$ på formen $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Svar: För $C=2$ och $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$ kan vi skriva om $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x$

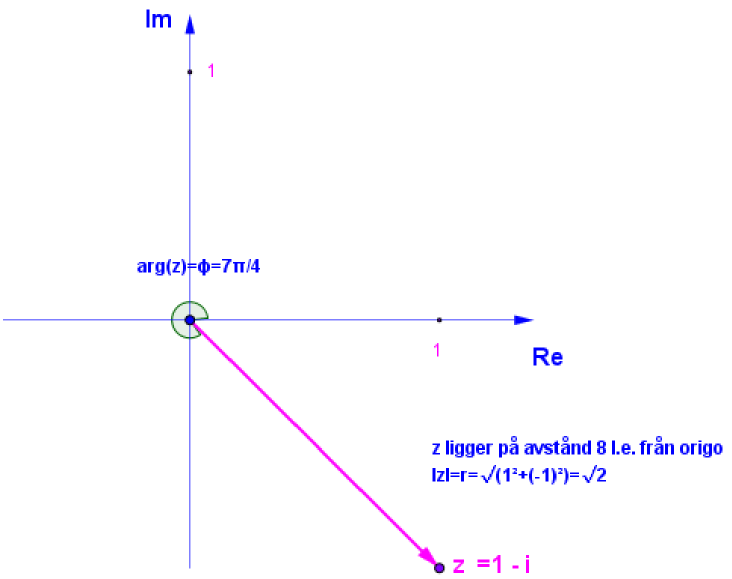
på formen $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

2.

a) Skriv det komplexa talet $w=\frac{3-2i}{5+i}$, på formen $re^{i\varphi}$.

Lösning:

$$w=\frac{3-2i}{5+i}=\frac{(3-2i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{15-3i-10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{13-13i}{26}=\frac{1}{2}(1-i)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

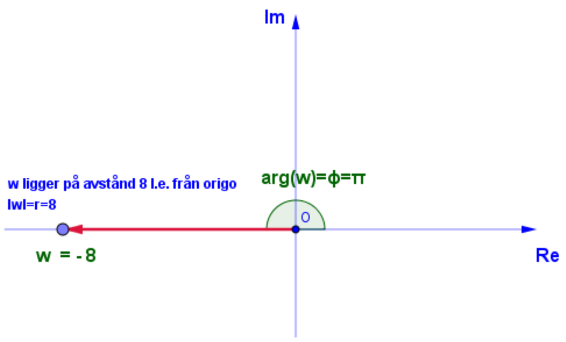


Svar: $w=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$

b) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3+8=0$. Svara på formen $a+bi$.

Lösning:

$z^3+8=0 \Leftrightarrow \quad z^3=-8 \Leftrightarrow z^3=8e^{(\pi+2\pi k)i}$ med heltal k.



Genom att skriva z i polär form $\alpha e^{\beta i}$ kommer ekvationen $z^3=8e^{(\pi+2\pi k)i} \Rightarrow$

$$\left(\alpha e^{\beta i}\right)^3=8e^{(\pi+2\pi k)i} \Leftrightarrow \alpha^3 e^{3\beta i}=8e^{(\pi+2\pi k)i} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^3=8\\ e^{3\beta i}=e^{(\pi+2\pi k)i}, \text{där } k=0,1,2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ 3\beta=(\pi+2\pi k), \text{där } k=0,1,2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{3}, \text{där } k=0,1,2\end{cases}$$

vi får därför lösningarna

$$z=\alpha e^{\beta i}=2e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)i}, \text{där } k=0,1,2$$

För respektive värde på k, får vi nu alla tre lösningar till $z^3=-8$:

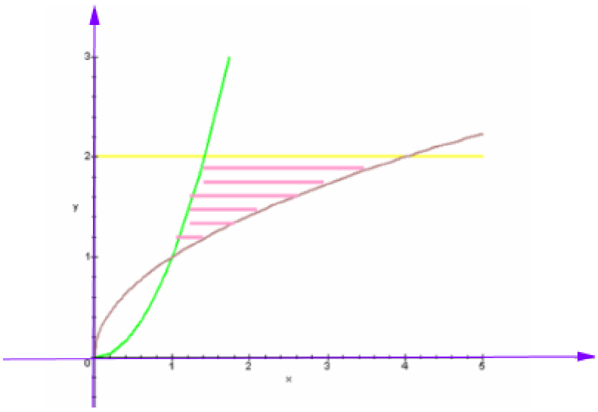
$$k = 0 \ \ ger \ \ z_1 = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right)i} = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i} = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\sqrt{3}\cdot i \Leftrightarrow z_1 = 1+\sqrt{3}\cdot i$$

$$k = 1 \ \ ger \ \ z_2 = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right)i} = 2e^{(\pi)i} = 2(cos(\pi)+i\,sin(\pi))=$$
$$= 2(-1+i\cdot 0) = -2 \Leftrightarrow z_2 = -2$$

$$k = 2 \ \ ger \ \ z_3 = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right)i} = 2e^{\left(\frac{5\pi}{3}\right)i} = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-\sqrt{3}\cdot i \Leftrightarrow z_3 = 1-\sqrt{3}\cdot i$$

Svar: $z_1 = 1+\sqrt{3}\cdot i$, $z_2 = -2$ $\ z_3 = 1-\sqrt{3}\cdot i$

3. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2$, $y = 2$ och $y = \sqrt{x}$.
Integrationsgränserna skall bestämmas algebraiskt.



Vi börjar med att söka respektive x-koordinater för respektive skärningspunkter

① $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \Rightarrow \\ x > 0 \end{cases}$

$x^2 = \sqrt{x}$ och $x > 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x} = 0$ och $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1 - x\sqrt{x}\right) = 0$ och $x > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} = 0\right.$

eller $\left. 1 - x\sqrt{x} = 0\right)$ och $x > 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ eller } x^{3/2} = 1\right)$ och $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

② $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 \quad \Rightarrow \\ x > 0 \end{cases}$ $x^2 = 2$ och $x > 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ och $x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

③ $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 \quad \Rightarrow \\ x > 0 \end{cases}$ $\sqrt{x} = 2$ och $x > 0 \Leftrightarrow x = 4$

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^4 \left(2 - \sqrt{x}\right) dx = = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} + \left[2x - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{\sqrt{2}}^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 2\left(2^{\frac{3}{4}}\right) - (1 - 2)\right) + \frac{2}{3}\left(3 \cdot 4 - 4^{1 + \frac{1}{2}} - \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{4}}\right)\right) = -\frac{4}{3} \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 3 = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3}$$

Svar: $A=\dfrac{9-4\sqrt{2}}{3}$ a.e.

4.

a) Beskriv funktionen $f(x)=-x+|2-3x|$ utan absolutbelopp och rita kurvan $y=f(x)$.

Lösning:

Vi börjar med att definiera absolutbeloppet $|2-3x|$.

Def. ger följande

$$|2-3x|=\begin{cases} 2-3x & om \quad 2-3x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{2}{3} \\ -(2-3x) & om \quad 2-3x<0 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Med hjälp av def. kan vi nu beskriva $f(x)=-x+|2-3x|$ för respektive fall ☺

fall1 då $x\leq\dfrac{2}{3}$ blir $|2-3x|=2-3x$

ger $f(x)=-x+|2-3x|=-x+2-3x=-4x+2$

och

fall2 då $x>\dfrac{2}{3}$ blir $|2-3x|=3x-2$

ger $f(x)=-x+|2-3x|=-x+3x-2=2x-2$

Summa summarum kan vi nu beskriva funktion utan absolutbelopp

$$f(x)=-x+|2-3x|=\begin{cases} -4x+2 & då \quad x\leq\dfrac{2}{3} \\ 2x-2 & då \quad x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vi kan nu se att funktionen beskrivs av en stråle/linje i respektive intervall.

För att rita respektive linje behöver vi känna till två punkter på respektive.

Båda linjer möts i punkten där $x=\dfrac{2}{3}$ och

$$y = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} + \left|2 - 3\cdot\frac{2}{3}\right| = -\frac{2}{3} + |2-2| = -\frac{2}{3}$$

alltså $P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

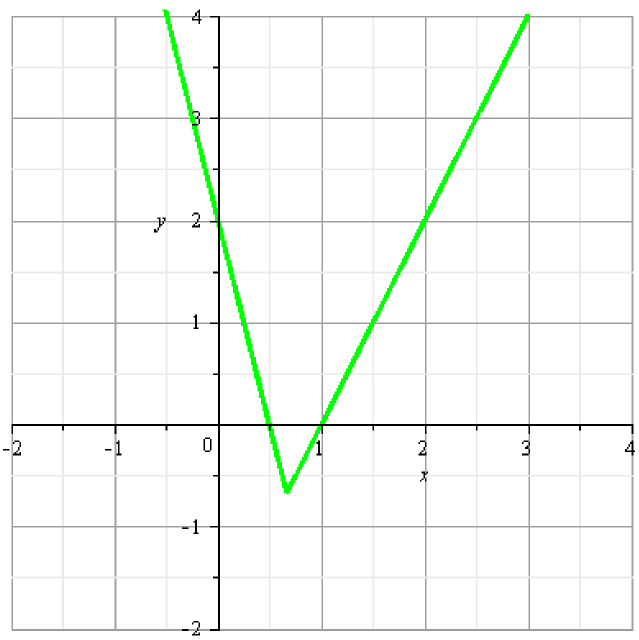
Ytterligare punkter får vi genom att titta på "m" för respektive funktion som ger y- koordinat för linjernas skärningspunkter med y-axeln.

För funktionen $f(x) = -4x + 2 \quad då \quad x \leq \frac{2}{3}$ kommer att fås $P_1 = (0,2)$

och

för funktionen $f(x) = 2x - 2 \quad då \quad x > \frac{2}{3}$ kommer att fås $P_2 = (0,-2)$.

Vi markerar nu respektive punkter i koordinatsystemet och ritar "synliga" strålar bara där funktionen är definierad.



Svar: $f(x) = -x + |2-3x| = \begin{cases} -4x+2 & \text{då} \quad x \le \frac{2}{3} \\ 2x-2 & \text{då} \quad x > \frac{2}{3} \end{cases}$

b) Lös ekvationen $-x + |2-3x| = 3$ algebraisk.

Lösning:

Vi börjar med att definiera absolutbeloppet $|2-3x|$.

Def. ger följande

$$|2-3x| = \begin{cases} 2-3x & om \quad 2-3x \ge 0 \iff x \le \frac{2}{3} \\ -(2-3x) & om \quad 2-3x < 0 \iff x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

ger $f(x) = -x + |2-3x| = -x + 2 - 3x = -4x + 2$

och

ger $f(x) = -x + |2-3x| = -x + 3x - 2 = 2x - 2$

fall1, $x \le \frac{2}{3}$	**fall2**, $x > \frac{2}{3}$
$\|2-3x\| = 2-3x$ ger	$\|2-3x\| = 3x-2$ ger
$-x+\|2-3x\|=3 \iff$ $-x+2-3x=3 \iff$ $-4x+2=3 \iff$ $-4x=1 \iff$ $x=-\frac{1}{4}$	$-x+\|2-3x\|=3 \iff$ $-x-2+3x=3 \iff$ $2x-2=3 \iff$ $2x=5 \iff$ $x=\frac{5}{2}$
$x=-\frac{1}{4}$ ligger i det givna intervallet, alltså är en lösning	$x=\frac{5}{2}$ ligger i det givna intervallet, alltså är en lösning

Svar: $x=-\frac{1}{4}$, $x=\frac{5}{2}$

5. Beräkna integralernas värde

a)

$$\int_1^2 \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\left(\sqrt{x}-3\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-3x\right]_1^2=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-3x\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[x\left(2\sqrt{x}-9\right)\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\left(2\sqrt{2}-9\right)-1\cdot\left(2\sqrt{1}-9\right)\right)=\frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-18-2+9\right)=\frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-11\right)=\frac{4\sqrt{2}-11}{3}$$

Svar: $\int_1^2 \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{4\sqrt{2}-11}{3}$

b)

$$\int x\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v=\frac{x^2}{2} & v'=x\end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$$

Svar:

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$$

c)

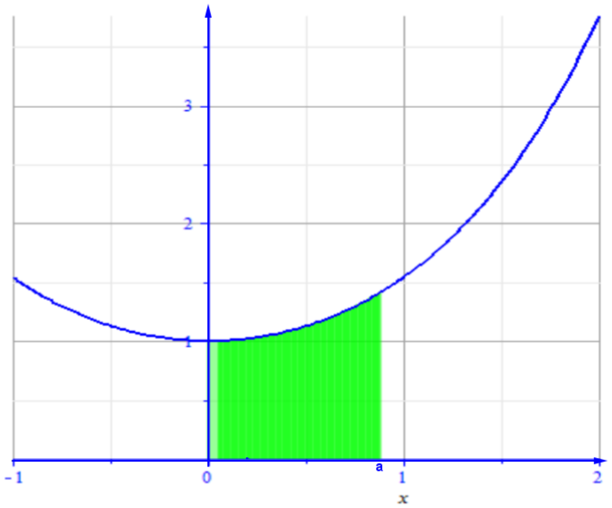
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2\cdot xdx=\begin{bmatrix} x^2=t \\ 2xdx=dt \Leftrightarrow xdx=\frac{1}{2}dt \\ x=0 \quad ger \quad t=0 \\ x=\sqrt{\pi} \quad ger \quad t=\pi\end{bmatrix}=\int_0^{\pi}\sin t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin tdt=\frac{1}{2}\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\pi-\left(-\cos 0\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-\left(-1\right)-\left(-1\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Svar: $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx = 1$

6. Upprita kurvan $y = \dfrac{(e^x + e^{-x})}{2}$ i ett koordinatsystem. En rät linje parallell med *y*-axeln skär positiva *x*-axeln och begränsar tillsammans med de positiva koordinataxlarna och kurvan ett område med arean 1 areaenhet.
Bestäm volymen av den kropp som alstras då detta område får rotera kring *x*-axeln.

   Det förväntas att du förenklar svaret så långt det går.



$$\int_0^a \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = 1 \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\int_0^a \left(e^x + e^{-x}\right)dx = 1 \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow \int_0^a \left(e^x + e^{-x}\right)dx = 2 \ \text{ och } \ a > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[e^x - e^{-x}\right]_0^a = 2 \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow \left(e^a - e^{-a} - \left(e^0 - e^0\right)\right) = 2 \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow e^a - e^{-a} = 2 \ \text{ och } \ a > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2a} - 1 = 2e^a \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow e^{2a} - 2e^a - 1 = 0 \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow \left(e^a - 1\right)^2 - 2 = 0 \ \text{ och } \ a > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^a - 1 - \sqrt{2}\right)\left(e^a - 1 + \sqrt{2}\right) = 0 \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow \left(\left(e^a - 1 - \sqrt{2}\right) = 0 \ \text{ eller } \ \left(e^a - 1 + \sqrt{2}\right) = 0\right) \ \text{ och } \ a > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^a = 1 + \sqrt{2} \ \text{ eller } \ e^a = 1 - \sqrt{2}\right) \text{och } \ a > 0 \Leftrightarrow e^a = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$V_x = \int_0^{ln(1+\sqrt{2})} \pi \cdot \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{ln(1+\sqrt{2})} \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{ln(1+\sqrt{2})} \left(e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}\right) dx =$$

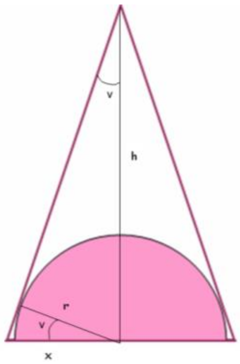
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{ln(1+\sqrt{2})} \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{ln(1+\sqrt{2})} = \frac{\pi}{8} \cdot \left[e^{2x} + 4x - e^{-2x}\right]_0^{ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \left(e^{2 \cdot ln(1+\sqrt{2})} + 4 \cdot ln(1+\sqrt{2}) - e^{-2 \cdot ln(1+\sqrt{2})} - \left(e^0 + 0 - e^0\right)\right) = \frac{\pi}{8} \cdot \left(e^{2 \cdot ln(1+\sqrt{2})} + 4 \cdot ln(1+\sqrt{2}) - e^{-2 \cdot ln(1+\sqrt{2})}\right) = \text{Sv}$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \left(3 + 2\sqrt{2} + 4 \cdot ln(1+\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{8} \cdot \left(4\sqrt{2} + 4 \cdot ln(1+\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + ln(1+\sqrt{2})\right)$$

Svar: $V_x = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + ln(1+\sqrt{2})\right)$ v.e.

7. Ett halvklot med radien r tangeras på utsidan av en rak cirkulär kon. Bestäm exakt konens toppvinkel då konens volym är så liten som möjligt.



Lösning:

Vi kallar halva toppvinkeln v där $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

Dra en radie där i klotet till en punkt där klotet tangeras av konen.

Vinkeln mellan denna radie och konens basradie är också v. (likformighet)

Man får

$h = \frac{r}{\sin v}$ och $x = \frac{r}{\cos v}$

Konens volym

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{\cos^2 v} \cdot \frac{r}{\sin v} = \frac{\pi \cdot r^3}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 v \cdot \sin v}$$

Vi studerar nu funktionen $y = cos^2 v \cdot sin v$, $\left(0 \le v \le \frac{\pi}{2}\right)$

När y har maximum har V minimum.

$$y' = 2\cos v \cdot (-\sin v) \cdot \sin v + \cos^2 v \cdot \cos v = \cos v \cdot \left(2(-\sin v) \cdot \sin v + \cos^2 v\right) =$$
$$= \cos v \cdot \left(\cos^2 v - 2\sin^2 v\right)$$

I intervallet $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ är $v > 0$.

$y' = 0$ ger då endast $\cos^2 v - 2\sin^2 v = 0$ och $0 \le v \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \tan^2 v = \frac{1}{2}$ och $0 \le v \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \tan v = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow v = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Eftersom $y > 0$ i intervallet $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ och måste det erhållna värdet ger ett

maximum för y, dvs ett minimum för V.

Toppvinkeln är då $2v = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Svar: Toppvinkeln är $2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.