Lösningsförslag
2018-03-12

1.

a)

$$VL=\frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)=\begin{bmatrix}1=\cos^2 x+\sin^2 x\\ \cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}\left(2\sin^2 x\right)=\sin^2 x=HL$$

vssv

b)

$$\cos(2x)=2\sin x\Leftrightarrow\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x\Leftrightarrow\left(1-\sin^2 x\right)-\sin^2 x=2\sin x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=2\sin x\Leftrightarrow 2\sin^2 x+2\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin^2 x+\sin x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=0\Leftrightarrow\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sin x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{eller}\quad\left(\sin x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<-1\quad ,OBS!\quad -1\le\sin x\le 1\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+2\pi\cdot n\\ eller\\ x=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+2\pi\cdot n\end{cases},\quad där\quad n\in Z\,.$$

Svar: $$\begin{cases}x=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+2\pi\cdot n\\ eller\\ x=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+2\pi\cdot n\end{cases},\quad där\quad n\in Z$$

2.

a)

$$10\,e^{\frac{5\pi i}{2}} = 10\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)=10\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi+\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=10\cdot\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=10\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=10\cdot(0+i\cdot 1)=10\cdot i$$

Svar: $10e^{\frac{5\pi i}{2}}=10\cdot i$

b)

$$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i=\begin{bmatrix} r=\left|-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2 \\ \phi=\arg\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)=\dfrac{5\pi}{4}\end{bmatrix}=2\cdot e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

Svar: $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2\cdot e^{\frac{5\pi}{4}i}$

c)

$$\frac{1}{z^2}=[z=3+4i]=\frac{1}{(3+4i)^2}=\frac{1}{\left(9+24i+16i^2\right)}=\frac{1}{(9+24i-16)}=\frac{1}{(24i-7)}=$$

$$=\frac{1\cdot(24i+7)}{(24i-7)\cdot(24i+7)}=\frac{24i+7}{24^2i^2-7^2}=\frac{24i+7}{-24^2-7^2}=-\frac{7}{625}+\left(-\frac{24}{625}\right)\cdot i$$

Svar: $\frac{1}{z^2}=-\frac{7}{625}+\left(-\frac{24}{625}\right)\cdot i$ då $z=3+4i$

3.

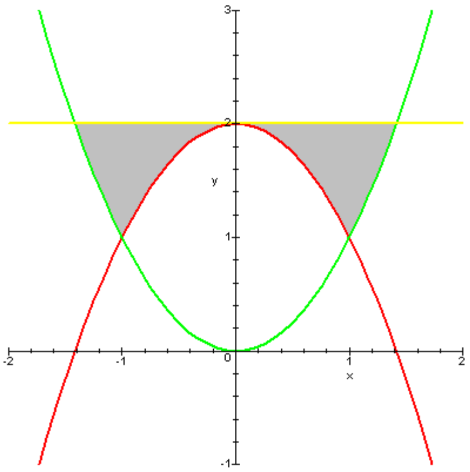
a)

Vi söker först respektive **x-koordinater** för respektive skärningspunkter

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2\end{cases}\Rightarrow x^2=2-x^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=1 \text{ eller } x=-1$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ eller } x = -\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$$



$$A = 2\cdot\left(\int_0^1 \left(2-\left(2-x^2\right)\right)dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2-x^2\right)dx\right) =$$
$$= 2\cdot\left(\int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2-x^2\right)dx\right)$$

Svar för del a:

$$A = 2\cdot\left(\int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2-x^2\right)dx\right)$$

b)

$$A = 2\cdot\left(\int_0^1 \left(x^2\right)dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2-x^2\right)dx\right) = 2\cdot\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= 2\cdot\left(\left(\frac{1}{3}-0\right) + \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3\right) - \left(2 - \frac{1}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(-4 + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\left(-4 + 4\sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Svar för del b :

$$A = \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{3} \quad a.e.$$

4.

$$z=\frac{1}{1+ai}+\frac{1}{1+2i}=\frac{1\cdot(1-ai)}{(1+ai)\cdot(1-ai)}+\frac{1\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}=\ldots=\frac{(1-ai)}{\left(1+a^2\right)}+\frac{(1-2i)}{5}=$$

$$=\frac{5\cdot(1-ai)+(1-2i)\cdot\left(1+a^2\right)}{5\cdot\left(1+a^2\right)}=\frac{5-5\cdot a\cdot i+1+a^2-2i-2a^2\cdot i}{5\cdot\left(1+a^2\right)}=\frac{5+1+a^2}{5\cdot\left(1+a^2\right)}+i\cdot\frac{-5\cdot a-2-2a^2}{5\cdot\left(1+a^2\right)}$$

$\Rightarrow \quad Re(z)=\dfrac{6+a^2}{5\cdot\left(1+a^2\right)}$ och $Im(z)=\dfrac{-5\cdot a-2-2a^2}{5\cdot\left(1+a^2\right)}$, z blir reellt om $Im(z)=0\Rightarrow$

$$\frac{-5\cdot a-2-2a^2}{5\cdot\left(1+a^2\right)}=0\Leftrightarrow -5\cdot a-2-2a^2=0\Leftrightarrow a^2+\frac{5}{2}a+1=0\Leftrightarrow\left(a+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{16}{16}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(a+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)=0\Leftrightarrow\left(a+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(a+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=0\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{2}\right)(a+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+\frac{1}{2}=0 \quad eller \quad a+2=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2} \quad eller \quad a=-2$$

- $a=-\dfrac{1}{2}$ ger $z=Re(z)=\dfrac{6+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{5\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)}=\ldots=1$

- För $a=-2$ ger $z=Re(z)=\dfrac{6+(-2)^2}{5\cdot\left(1+(-2)^2\right)}=\ldots=\dfrac{2}{5}$

Svar: $a=-\dfrac{1}{2}$ ger $z=1$, $a=-2$ ger $z=\dfrac{2}{5}$.

5.

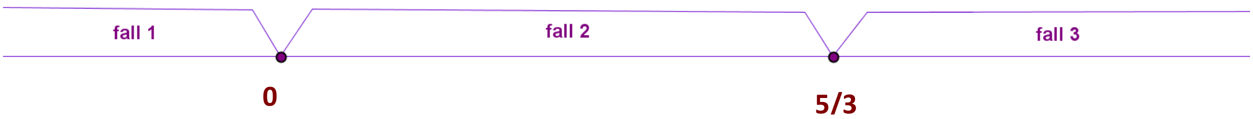
Vi börjar med att definiera absolutbeloppen $|x|$ och $|5-3x|$.

Def. ger följande

$$|x|=\begin{cases} x & om \quad x\geq 0\\ -x & om \quad x<0\end{cases}$$

och

$$|5-3x| = \begin{cases} 5-3x & \text{om} \quad 5-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{3} \\ -(5-3x) & \text{om} \quad 5-3x < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$$



Fall 1: $x \leq 0$

$$|x| - |5-3x| + 3 \leq x \Leftrightarrow -x-(5-3x)+3 \leq x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \leq 2$$

Alltså $(x \leq 0$ **och** $x \leq 2) \Leftrightarrow x \leq 0$ $\Rightarrow$ lösningen för **fall 1** är $x \leq 0$.

Fall 2: $0 < x \leq \dfrac{5}{3}$

$$|x| - |5-3x| + 3 \leq x \Leftrightarrow x-(5-3x)+3 \leq x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

Alltså $\left(0 < x \leq \dfrac{5}{3}\right.$ **och** $\left. x \leq \dfrac{2}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < x \leq \dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ lösningen för **fall 2** är $0 < x \leq \dfrac{2}{3}$.

Fall 3: $x > \dfrac{5}{3}$

$$|x| - |5-3x| + 3 \leq x \Leftrightarrow x+(5-3x)+3 \leq x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

Alltså $\left(x > \dfrac{5}{3}\right.$ **och** $\left. x \geq \dfrac{8}{3}\right) \Leftrightarrow x \geq \dfrac{8}{3}$ $\Rightarrow$ lösningen för **fall 3** är $x \geq \dfrac{8}{3}$.

Respektive fall ger lösningen till ekvationen:

$$\left(x \leq 0 \text{ eller } 0 < x \leq \frac{2}{3} \text{ eller } x \geq \frac{8}{3} \right) \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{2}{3} \text{ eller } x \geq \frac{8}{3} \right)$$

Svar: $x \leq \dfrac{2}{3}$ eller $x \geq \dfrac{8}{3}$,**alternativt svar:** $x \in \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{8}{3}, +\infty\right[$

6.

Vi vet att k är reellt $\Rightarrow$ alla koefficienter i ekvationen är reella $\Rightarrow$ om $z=2-i$ är en rot så är även konjugatet till $z=2-i$ alltså $z=2+i$ är en rot

$\Rightarrow (z-(2-i))\cdot(z-(2+i))=(z-2+i)\cdot(z-2-i)=((z-2)+i)\cdot((z-2)-i)=$
$=$ [konjugatregeln ger] $=z^2-4z+4-i^2=z^2-4z+5$ är en faktor till $z^3+4z^2+kz+40$.

Ekvationen $z^3+4z^2+kz+40=0$ kan då skrivas som $\left(z^2-4z+5\right)\cdot q(z)=0$ där

$$q(z)=\frac{z^3+4z^2+k\cdot z+40}{\left(z^2-4z+5\right)}=[polynomdivision]=z+8+\frac{z(27+k)}{\left(z^2-4z+5\right)}$$

rest $=0 \Rightarrow 27+k=0 \Leftrightarrow k=-27$

för $k=-27$ blir $q(z)=z+8$ som medför att ekvationen kan skrivas som $\left(z^2-4z+5\right)\cdot(z+8)=0$

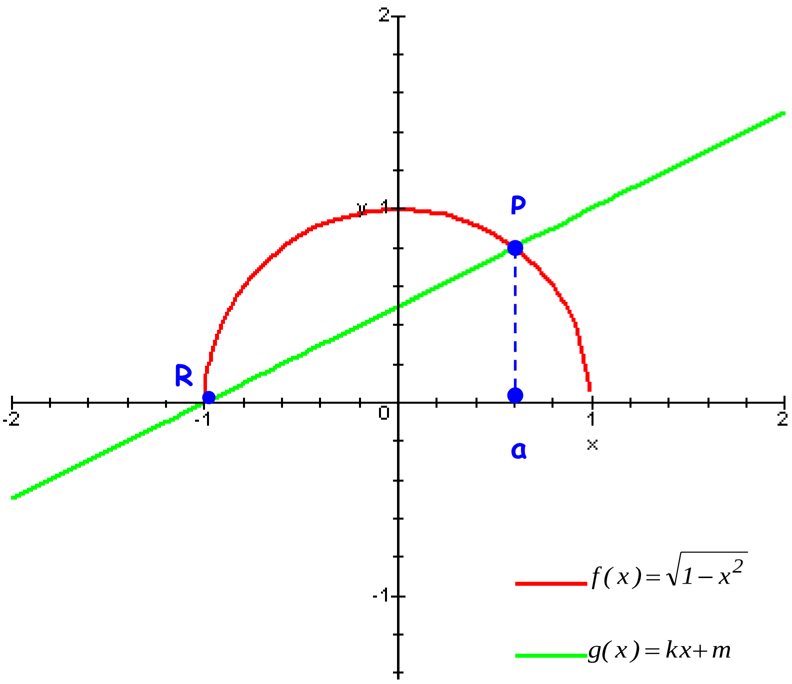
vidare

$\left(z^2-4z+5\right)\cdot(z+8)=0 \Leftrightarrow \left(z^2-4z+5\right)=0$ eller $(z+8)=0 \Leftrightarrow z=2-i$

eller $z=2+i$ eller $z=-8$.

Svar: $k=-27$, $z=2-i$, $z=2+i$, $z=-8$.

7.



Linjen $g(x)=kx+m$ går genom **P**= $\left(a,\sqrt{1-a^2}\right)$ och **R**= $(-1,0)$.

Linjens ekvation blir då $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a+1}\cdot x+\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a+1} \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{\sqrt{1-a^2}\cdot(x+1)}{a+1}$

$$V_{kon}=\int_{-1}^{a}\pi g^2(x)dx=\int_{-1}^{a}\pi\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\cdot(x+1)}{a+1}\right)^2 dx=\pi\frac{\left(1-a^2\right)}{(a+1)^2}\int_{-1}^{a}(x+1)^2\,dx=\ldots=$$

$$=-\frac{\pi}{3}\left(a^3+a^2-a-1\right) \text{ alltså } V_{kon}=-\frac{\pi}{3}\left(a^3+a^2-a-1\right).$$

$V'_{kon}=0\Rightarrow\ldots\Leftrightarrow a=-1$ eller $a=\dfrac{1}{3}$ **(** $a=-1$ är inte av intresse**)**

$V''_{kon}\left(\dfrac{1}{3}\right)<0\Rightarrow V_{kon_{max}}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32\pi}{81}$ v.e. och $V_{klot}(1)=\dfrac{4\cdot\pi\cdot 1^3}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$ v.e.

vidare blir $\dfrac{V_{kon_{max}}}{V_{klot}}=\dfrac{8}{27}$.

Svar: $\dfrac{V_{kon_{max}}}{V_{klot}}=\dfrac{8}{27}$