Facit

2018-04-05

1.

a) Lös ekvationen $cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lösning:

$$cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \\ eller \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \end{cases}, \quad där \quad n \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + \pi \cdot n \\ eller \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi \cdot n \end{cases}, \quad där \quad n \in Z \quad .$$

Svar: $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi \cdot n, \quad där \quad n \in Z$

b) Bestäm det <u>exakta</u> värdet av $cos(2v)$ om $cos\, v = \frac{8}{9}$.

Lösning:

$$cos(2v) = cos^2 v - sin^2 v = \left[cos^2 v + sin^2 v = 1 \Leftrightarrow sin^2 v = 1 - cos^2 v\right] =$$

$$= cos^2 v - \left(1 - cos^2 v\right) = 2cos^2 v - 1 = 2(cos\, v)^2 - 1 = \left[cos\, v = \frac{8}{9}\right] = 2\left(\frac{8}{9}\right)^2 - 1 = \frac{2 \cdot 64 - 81}{81} =$$

$$= \frac{47}{81}$$

.

Svar: $cos(2v) = \frac{47}{81}$

c) Derivera $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}$. Svara så enkelt som möjligt.

Lösning:

$$f'(x)=\frac{(\cos x-\sin x)\cos x-(\sin x+\cos x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\left[\cos^2 x+\sin^2 x=1\right]=\frac{1}{\cos^2 x}$$

.

Svar: $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2.

a) Beräkna $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

Lösning:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_1^e=[x>0]=\left[\ln x\right]_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1$$.

Svar: $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=1$

b) Beräkna $\int xe^{2x}\,dx$.

Lösning:

$$\int xe^{2x}\,dx=\begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} & v'=e^{2x}\end{bmatrix}=\left[uv-\int vu'\right]=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1dx=$$

$$=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}dx=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C=\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$$

.

Svar: $\int xe^{2x}\,dx=\dfrac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$

c) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x + 5)\cos x dx$.

Lösning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x + 5)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x \cos x + 5\cos x) dx = [2\sin x \cos x = \sin(2x)] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin(2x) + 5\cos x) dx = \left[-\frac{\cos(2x)}{2} + 5\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} + 5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \left(-\frac{\cos(0)}{2} + 5\sin(0)\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{10}{4}\right) - \left(-\frac{2}{4} + 0\right) = \frac{9}{4} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4}$$

.

Svar: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x + 5)\cos x dx = \frac{11}{4}$

3.

a) Bestäm $|z|$, då $z = \frac{1+2i}{i}$. Svara så enkelt som möjligt.

Lösning:

$$|z| = \left|\frac{1+2i}{i}\right| = \left|\frac{i\cdot(1+2i)}{i\cdot i}\right| = \left|\frac{i+2i^2}{i^2}\right| = \left[def.\ i^2 = -1\right] = \left|\frac{i-2}{-1}\right| = |2-i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

.

Svar: $|z| = \sqrt{5}$

b) Man kan definiera sinusfunktionen för komplexa z genom formeln

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Bestäm med denna definition $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$. Svara så enkelt som möjligt.

Lösning:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+i\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+i\right)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}i+i^2\right)} - e^{-\left(\frac{\pi}{2}i+i^2\right)}\right) = \left[def.\ i^2 = -1\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}i-1\right)} - e^{-\left(\frac{\pi}{2}i-1\right)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{-1} - e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot e\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{e} - \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot e\right) = \frac{1}{2i}\left((0 + i\cdot 1)\cdot\frac{1}{e} - (0 + i\cdot(-1))\cdot e\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{e} + i\cdot e\right) = \frac{i}{2i}\left(\frac{1}{e} + e\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + \frac{e^2}{e}\right) = \frac{1+e^2}{2e}$$

.

Svar: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) = \frac{1+e^2}{2e}$

4. Beskriv funktionen $f(x) = 2x - |2-4x|$ utan absolutbelopp och rita kurvan $y = f(x)$.

Lösning:

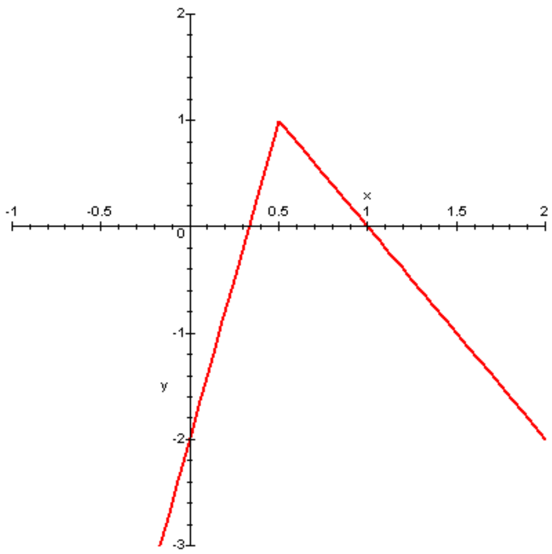
Vi börjar med att definiera absolutbeloppet $|2-4x|$.

Def. ger följande

$$|2-4x| = \begin{cases} 2-4x & \text{om} \quad 2-4x \geq 0 \iff 2 \geq 4x \iff x \leq \frac{1}{2} \\ -(2-4x) & \text{om} \quad 2-4x < 0 \iff 2 < 4x \iff x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

fall1 , $x \le \frac{1}{2}$	**fall2** , $x > \frac{1}{2}$
$\lvert 2-4x \rvert = 2-4x$ **ger**	$\lvert 2-4x \rvert = -2+4x$ **ger**
$f(x) = 2x - \lvert 2-4x \rvert =$ $= 2x - (2-4x) = 2x - 2 + 4x =$ $= 6x - 2$	$f(x) = 2x - \lvert 2-4x \rvert$ $= 2x - (-2+4x) = 2x + 2 - 4x =$ $= -2x + 2$

alltså $f(x) = 2x - \lvert 2-4x \rvert = \begin{cases} 6x-2 & \text{då} \quad x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{då} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$



Svar: $f(x) = \begin{cases} 6x-2 & \text{då} \quad x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{då} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$

5. Undersök om funktionen $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$.

Lösning:

- **Ange** D_f

$$2x-5 \neq 0 \text{ och } x \geq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2} \text{ och } x \geq 0 \text{ ger } D_f = \left[0, \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$$

Detta medför att linjen med ekvationen $x=\dfrac{5}{2}$ är funktionens lodräta asymptot.

Observera att $f(x)=\dfrac{1}{2x-5} \neq 0 \Rightarrow y=0$ är funktionens horisontella asymptot.

- **Beräkna** $f'(x)$

$$f'(x)=-\frac{2}{(2x-5)^2} \Rightarrow f'(x)<0 \text{ för alla } x$$

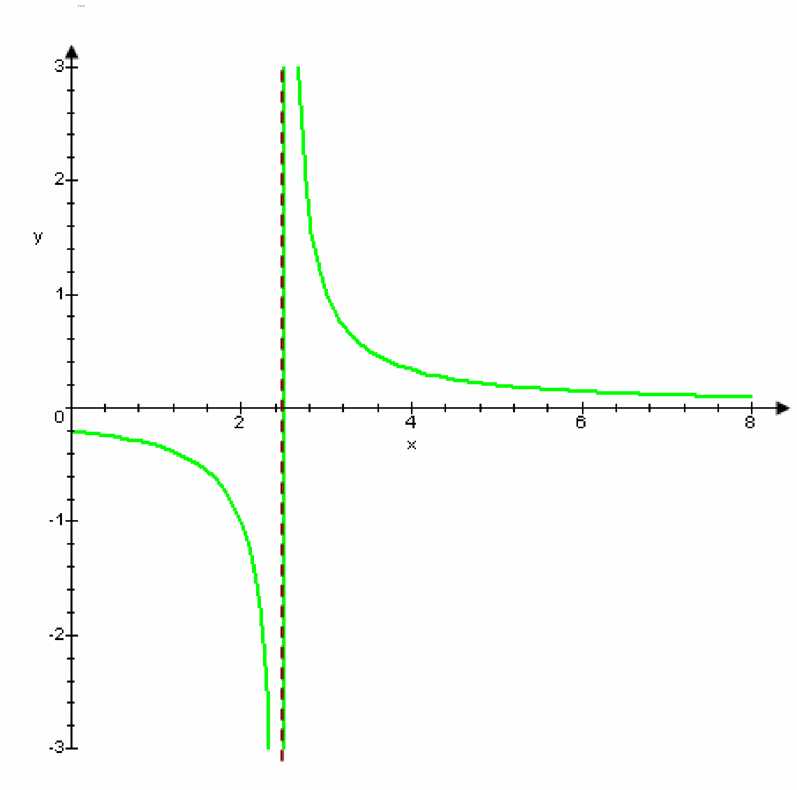
- Undersök hur funktionen uppför sig i närheten av $x=\dfrac{5}{2}$ och då $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}^-}\frac{1}{2x-5}=\lim_{x\to \frac{5}{2}^-}\frac{1}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\lim_{x\to \frac{5}{2}^-}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\left[\begin{array}{l} x-\frac{5}{2}\to 0^- \text{ då } x\to \frac{5}{2}^- \\ \text{vidare } \quad \frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}\to -\infty \end{array}\right]=\frac{1}{2}\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}^+}\frac{1}{2x-5}=\lim_{x\to \frac{5}{2}^+}\frac{1}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\lim_{x\to \frac{5}{2}^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\left[\begin{array}{l} x-\frac{5}{2}\to 0^+ \text{ då } x\to \frac{5}{2}^+ \\ \text{vidare } \quad \frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)}\to +\infty \end{array}\right]=\frac{1}{2}\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x-5}=\left[\begin{array}{l} 2x-5\to +\infty \\ \text{då } x\to +\infty \end{array}\right]=0 \text{ (ovanför x - axeln)}$$

x	0		$\frac{5}{2}$		
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$f(0)=-\frac{1}{5}$	$\searrow$ $-\infty$	Ej def.	$+\infty$ $\searrow$	0



Svar: Undersökningen av funktionen visar att funktionen inte har något största värde.

6. För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$.

a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p.

Lösning:

$$
\begin{array}{rl}
 & z^3 - 2 \\
\hline
 & z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 \quad \Big| \; z^2 + 4 \\
-\left(z^5 + 4z^3\right) & \\
\hline
 & -2z^2 - 8 \\
 & -\left(-2z^2 - 8\right) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow \left(z^2 + 4\right)$ är en faktor i polynomet p

$\Rightarrow p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = \left(z^2 + 4\right)\left(z^3 - 2\right)$

Svar: ser ovan

b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$.

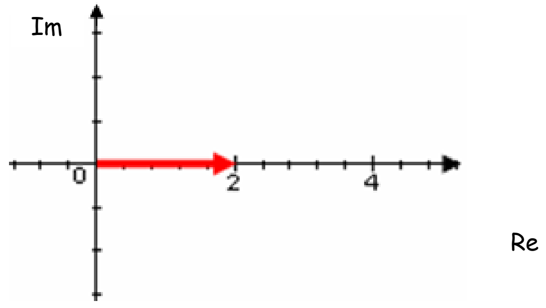
Lösning:

$z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + 4\right)\left(z^3 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0 \;\; eller \;\; z^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$z^2 = -4 \;\; eller \;\; z^3 = 2 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \;\; eller \;\; z^3 = 2 \Leftrightarrow z = \pm 2i \;\; eller \;\; z^3 = 2$

Vi löser nu $z^3 = 2$ separat

Vi börjar med att skriva det komplexa talet (vänster led av ekvationen) , 2 i polär form $re^{i\alpha}$.

där $r = |2| = 2$ och $\varphi = arg(2) = 0$ Tänk alltid på att rita bra bild !!! **Visualisera**



Alltså $r = 2$ och $\alpha = 0 + 2\pi \cdot k \quad \Rightarrow \quad 2 = 2e^{i \cdot 2\pi \cdot k}$, med heltal k.

Ekvationen $z^3 = 2$ kan nu skrivas på följande sätt $z^3 = 2e^{i \cdot 2\pi \cdot k}$ där $k = 0,1,2$.

Genom att skriva z i polär form $\beta e^{i\varphi}$ där $|z| = \beta$ och $arg(z) = \varphi$ kommer ekvationen

$$z^3 = 2e^{i \cdot 2\pi \cdot k} \Rightarrow \left(\beta e^{i\varphi}\right)^3 = 2e^{i \cdot 2\pi \cdot k} \text{ där } k = 0,1,2 \Leftrightarrow \beta^3 e^{i \cdot 3\varphi} = 2e^{i \cdot 2\pi \cdot k} \text{ där } k = 0,1,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta^3 = 2 \\ 3\varphi = 2\pi \cdot k \text{ ,där } k = 0,1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \sqrt[3]{2} \\ \varphi = \dfrac{2\pi \cdot k}{3} \text{ ,där } k = 0,1,2 \end{cases}$$

vi får därför lösningarna

$$z = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi \cdot k}{3}} \quad \text{där } k = 0,1,2$$

För respektive värde på k, får vi nu alla tre lösningar till $z^3 = 2$:

$k = 0$ ger $z = \sqrt[3]{2} \cdot e^0 = \sqrt[3]{2}$

$$k = 1 \text{ ger } z = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt[3]{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

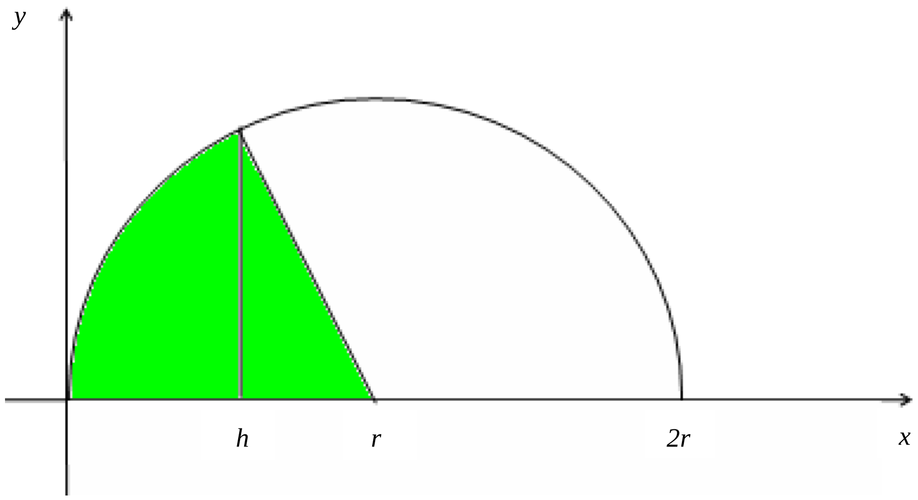
$$k = 2 \text{ ger } z = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt[3]{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Alltså respektive ekvation ger oss att:

$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 2i$ och ekvationen $z^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}$ eller $z = \dfrac{-\sqrt[3]{2}}{2} \pm i \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Svar: $z = \pm 2i$ eller $z = \sqrt[3]{2}$ eller $z = \dfrac{-\sqrt[3]{2}}{2} \pm i \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$.

7. Ett område, som begränsas av kurvan $f(x)=\sqrt{2rx-x^2}$, en radie som träffar kurvan i en punkt med x-koordinaten h och x-axeln, roterar kring x-axeln. Den alstrade kroppen kallas klotsektor. Visa att dess volym är $\dfrac{2\pi\cdot r^2 h}{3}$.



Lösning:

$$V=\int_0^h \pi\left(\sqrt{2rx-x^2}\right)^2 dx+\frac{\pi(r-h)\left(\sqrt{2rh-h^2}\right)^2}{3}=\pi\cdot\int_0^h\left(2rx-x^2\right)dx+\frac{\pi(r-h)\left(2rh-h^2\right)}{3}=$$

$$=\pi\cdot\left[rx^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^h+\frac{\pi\left(2r^2h-rh^2-2rh^2+h^3\right)}{3}=\pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}+\frac{\left(2r^2h-rh^2-2rh^2+h^3\right)}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi\cdot h}{3}\left(3rh-h^2+2r^2-rh-2rh+h^2\right)=\frac{\pi\cdot h}{3}\left(2r^2\right)=\frac{2\pi\cdot h\cdot r^2}{3}\Rightarrow V=\frac{2\pi\cdot h\cdot r^2}{3}$$

VSSV