Linköpings universitet
MAI
malgorzata wesolowska

Lössningsförslag

2018-05-31

1.

a) Lös ekvationen $\cos\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ då $0\le x\le 6\pi$. (2p)

Lösning:

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot n\\ eller\\ \frac{x}{3}=-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot n\end{cases},\quad där\quad n\in Z\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\frac{3\pi}{6}+6\pi\cdot n\\ eller\\ x=-\frac{3\pi}{6}+6\pi\cdot n\end{cases},\quad där\quad n\in Z\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+6\pi\cdot n\\ eller\\ x=-\frac{\pi}{2}+6\pi\cdot n\end{cases},\quad där\quad n\in Z$$

- För $n=0$ gäller $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}\in[0,6\pi]\\ eller\\ x=-\frac{\pi}{2}\notin[0,6\pi]\end{cases}$
- För $n=1$ gäller $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+6\pi\notin[0,6\pi]\\ eller\\ x=\frac{11\pi}{2}\in[0,6\pi]\end{cases}$

Svar: $x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{11\pi}{2}$

b) Lös ekvationen $\cos x=\sin x$ (1p)

Lösning:

$$\cos x=\sin x\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=1\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi\cdot n,\quad där\quad n\in Z$$

Svar: $x=\frac{\pi}{4}+\pi\cdot n,\quad där\quad n\in Z$

2.

a) Bestäm den primitiva funktionen till $f(x)=\frac{1}{x}-x^2$ som uppfyller villkoret $F(1)=5.$ (1p)

Lösning:

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx=ln|x|-\frac{1}{3}x^3+C$$

alltså

$$F(x)=ln|x|-\frac{1}{3}x^3+C\Rightarrow F(1)=ln|1|-\frac{1}{3}\cdot 1^3+C\Rightarrow[F(1)=5]\Rightarrow ln|1|-\frac{1}{3}\cdot 1^3+C=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}+C=5\Leftrightarrow C=5+\frac{1}{3}\Leftrightarrow C=\frac{16}{3}\qquad\Rightarrow F(x)=ln|x|-\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}$$

Svar: $F(x)=ln|x|-\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}$

b) Beräkna integralen

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)dx \qquad (2p)$$

Lösning:

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)dx=[\text{ partiell integration }]=\begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v=-\frac{1}{3}cos(3x) & v'=sin(3x)\end{bmatrix}=$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x\cdot cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{3}cos(3x)\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot[x\cdot cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}cos(3x)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\cdot cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)-0\cdot cos(3\cdot 0)\right)+\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

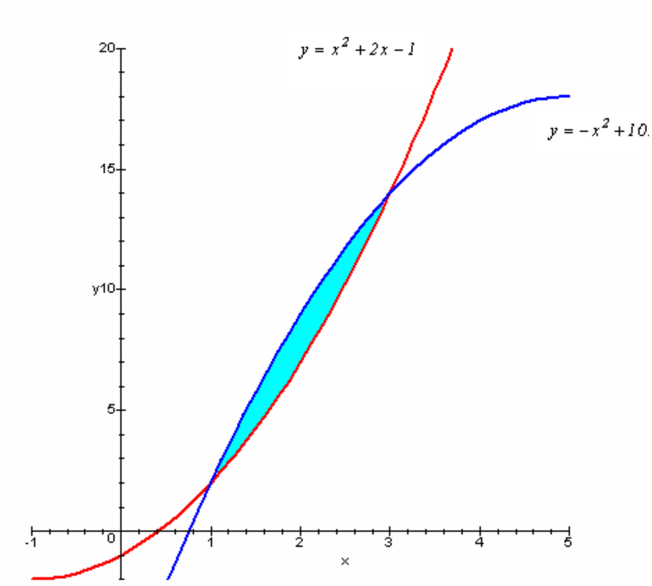
$$=-\frac{\pi}{9}cos(\pi)+\frac{1}{9}\left(sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)-sin(3\cdot 0)\right)=-\frac{\pi}{9}\cdot(-1)+\frac{1}{9}(sin(\pi)-sin(3\cdot 0))=$$

$$=\frac{\pi}{9}+\frac{1}{9}(0-0)=\frac{\pi}{9}$$

Svar: $f(x)=\frac{\pi}{9}$

3. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2 + 2x - 1$ och $y = -x^2 + 10x - 7$. Integrationsgränserna skall bestämmas algebraiskt. Svara exakt.

Lösning:



OBS!

Rita alltid figur!

Integrationsgränserna sökes först:

$$x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 10x - 7 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2-1)(x-2+1) = 0 \Leftrightarrow (\ x-3=0 \text{ eller } x-1=0\ ) \Leftrightarrow (\ x=3 \text{ eller } x=1)$$

$$A = \int_1^3 \left(-x^2 + 10x - 7 - \left(x^2 + 2x - 1\right)\right)dx = \int_1^3 \left(-2x^2 + 8x - 6\right)dx = -2\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx =$$

$$-2\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -2\left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right)\right) = -2\left(9 - 18 + 9 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

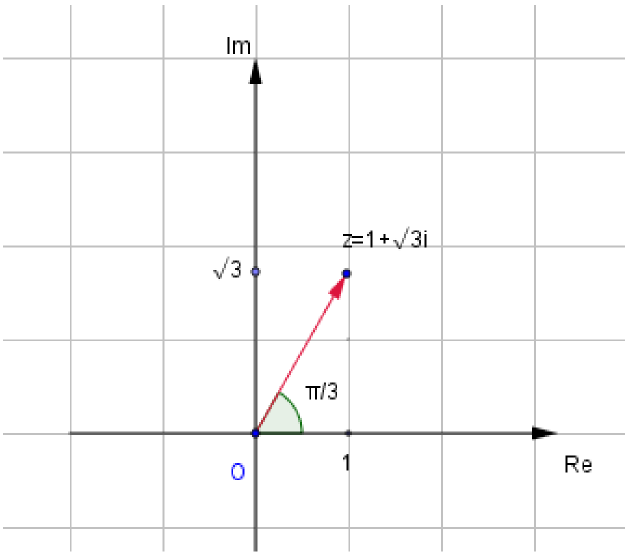
Svar: $A = \dfrac{8}{3}$ a.e.

4. Låt $z = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Bestäm $|z|$ och $arg(z)$. (1p)

Lösningsskiss:

$z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow Re(z) = 1, \quad Im(z) = \sqrt{3}$ (z ligger i första kvadranten, rita bild)



$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$tan(arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

Svar: $|z| = 2$, $arg(z) = \frac{\pi}{3}$

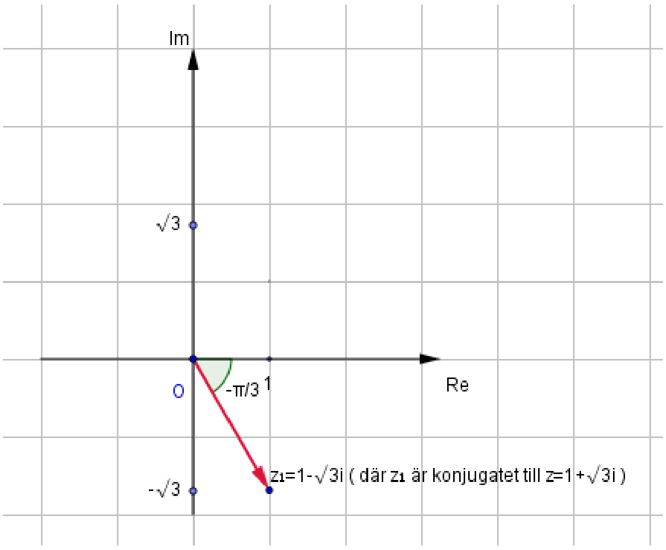
b) Skriv $\dfrac{z^4}{\bar{z}^3}$ på $a+bi$ - form. (2p)

Lösningsskiss:

Deluppgift a) ger $z=1+i\sqrt{3} \Rightarrow |z|=2$ och $arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$

Alltså $z=1+i\sqrt{3}=2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\bar{z}=1-i\sqrt{3} \Rightarrow Re(\bar{z})=1, \quad Im(\bar{z})=-\sqrt{3}$ (z ligger i fjärde kvadranten, rita bild)



$|\bar{z}|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$

$arg(\bar{z})=-\dfrac{\pi}{3}$ (rita figur för respektive z och $\bar{z}$ i komplexa koordinatplanet)

Med $|\bar{z}|=2$ och $arg(\bar{z})=-\dfrac{\pi}{3}$ kan $\bar{z}$ skrivas som $\bar{z}=1-i\sqrt{3}=2\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$$\frac{z^4}{\bar{z}^3}=\frac{\left(2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4}{\left(2\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^3}=\ldots=2\cdot e^{\frac{4\pi}{3}i}\cdot e^{\frac{3\pi}{3}i}=2\cdot e^{\frac{7\pi}{3}i}=2\cdot e^{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)i}=2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}i$$

Svar: $\dfrac{z^4}{\bar{z}^3}=1+\sqrt{3}i$

5. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x)=xe^x$ på intervallet $-3 \le x \le 1$.

Lösningsskiss:

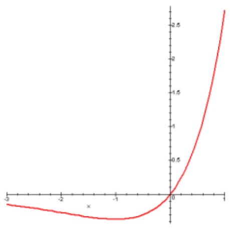
$$f(x)=xe^x \Rightarrow f(-3)=-3e^{-3}=\frac{-3}{e^3}$$

$$f(x)=xe^x \Rightarrow f(1)=e$$

$$f(x)=xe^x \Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^x(1+x)=0 \Leftrightarrow (1+x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \in [-3,\ \ 1]$$

Där $f(-1)=-e^{-1}=\frac{-1}{e}$



x	-3		-1		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{-3}{e^3}$	↘	$f_{lokal\ min}=\frac{-1}{e}$	↗	e

$\frac{-1}{e}<\frac{-3}{e^3}<e$ alltså $f(-1)<f(-3)<f(1)$

Från respektive beräkningar och teckentabell på intervallet framgår att funktionens största värde är e och minsta värde är $\frac{-1}{e}$ (på intervallet $-3 \le x \le 1$).

Svar: Funktionens största värde är e och minsta värde är $\frac{-1}{e}$.

6. Låt $p(z)=z^4-2z^3+6z^2-8z+8$

a) Ekvationen $p(z)=0$ har en imaginär rot, $z=a\cdot i$. Bestäm a.

Lösningsskiss:

$$p(a\cdot i)=(a\cdot i)^4-2(a\cdot i)^3+6(a\cdot i)^2-8(a\cdot i)+8=0\Rightarrow$$
$$a^4+2a^3\cdot i-6a^2-8a\cdot i+8=0\Leftrightarrow\left(a^4-6a^2+8\right)+i\cdot\left(2a^3-8a\right)=0 \text{ ger}$$

$$\begin{cases}a^4-6a^2+8=0\\2a^3-8a=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(a+2)\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)=0\\a(a-2)(a+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(a=2 \text{ eller } a=-2)$$

$\Rightarrow z=2i$ respektive $z=-2i$ är imaginära rötter till $p(z)=0$.

Svar: $a=2,\ a=-2$

b) Bestäm de övriga rötterna till ekvationen $p(z)=0$.

Lösningsskiss:

$$p(z)=0\Rightarrow z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0\Leftrightarrow(z-2i)(z+2i)\cdot q(z)=0$$

där

$$q(z)=\frac{z^4-2z^3+6z^2-8z+8}{(z-2i)(z+2i)}=\frac{z^4-2z^3+6z^2-8z+8}{\left(z^2+4\right)}=[\text{ polynomdivision }]=$$
$$=z^2-2z+2$$

$$q(x)=z^2-2z+2\Rightarrow$$

$$z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0\Leftrightarrow(z-2i)(z+2i)\cdot\left(z^2-2z+2\right)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(z=2i\quad eller\quad z=-2i\quad z=1+i\quad z=1-i\right)$$

Svar: $z=2i\quad eller\quad z=-2i\quad z=1+i\quad z=1-i$

7. Arean av ett klot ökar med den konstanta hastigheten $28\ cm^2$ per minut. Med vilken hastighet ökar klotets volym då radien är $6{,}5\ cm$?

Lösningsskiss:

$A = 4\pi \cdot r^2$ där r är beroende av t,

$$A = 4\pi \cdot r^2(t) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \left[\text{enligt} \quad \text{kedjerege ln}\right] = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} = 28$$

$$V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot (r(t))^3}{3} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi \cdot 3r^2}{3} \cdot \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Vidare

$$8\pi \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} = 28 \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{28}{8\pi \cdot r} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{7}{2\pi \cdot r}$$

För $\frac{dr}{dt} = \frac{7}{2\pi \cdot r}$ blir $\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{7}{2\pi \cdot r} = 2r \cdot 7 = 14r$

För $r = 6{,}5$ blir $\frac{dV}{dt} = 14 \cdot 6{,}5 = 14 \cdot \frac{13}{2} = 7 \cdot 13 = 91$

Svar: Klotets volym ökar med hastigheten $91\ cm^3$ per min.

Ha en fantastisk sommar