Linjära avbildningar

Jonathan Nilsson

Del I

Linjära avbildningar

Funktioner - repetition

Definition

En funktion $f : A \to B$ består av en **definitionsmängd** A, en **målmängd** B och en entydig regel som för varje $x \in A$ ger ett $f(x) \in B$. Mängden $\{f(x) \mid x \in A\}$ kallas **värdemängden** för f och är en delmängd av målmängden B.

Funktioner - repetition

Definition

En funktion $f : A \to B$ består av en **definitionsmängd** A, en **målmängd** B och en entydig regel som för varje $x \in A$ ger ett $f(x) \in B$. Mängden $\{f(x) \mid x \in A\}$ kallas **värdemängden** för f och är en delmängd av målmängden B.

Att $f(x) = y$ kan också skrivas $f : x \mapsto y$.

Funktioner - repetition

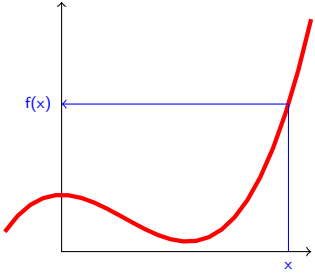
Definition

En funktion $f : A \to B$ består av en **definitionsmängd** A, en **målmängd** B och en entydig regel som för varje $x \in A$ ger ett $f(x) \in B$. Mängden $\{f(x) \mid x \in A\}$ kallas **värdemängden** för f och är en delmängd av målmängden B.

Att $f(x) = y$ kan också skrivas $f : x \mapsto y$.
Vi säger att f **avbildar** x på y, eller att y är **bilden** av x under f.

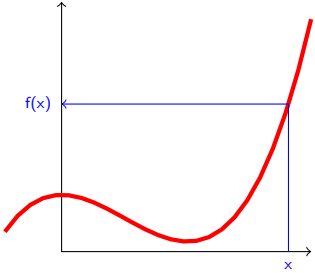
Funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funktioner man studerar inom envariabelanalys kan visualiseras med grafer



Funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funktioner man studerar inom envariabelanalys kan visualiseras med grafer



I denna kurs ska vi studera funktioner $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som är **linjära**.

Exempel på en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Definiera $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ enligt:

$$G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ e^{x-y} \\ (x+y)^2 \end{bmatrix}$$

Exempel på en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Definiera $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ enligt:

$$G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ e^{x-y} \\ (x+y)^2 \end{bmatrix}$$

Då gäller exempelvis

$$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ e \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exempel på en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Definiera $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ enligt:

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ 3x \\ -x + 2y \end{bmatrix}$$

Exempel på en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Definiera $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ enligt:

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ 3x \\ -x + 2y \end{bmatrix}$$

Då gäller exempelvis

$$F\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Linjära avbildningar

Definition

En funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om både

- $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
- $F(\lambda \mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{v})$

för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ och för alla skalärer λ.

Linjära avbildningar

Definition

En funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om både

- $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
- $F(\lambda \mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{v})$

för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ och för alla skalärer λ.

Linjära avbildningar

Definition

En funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om både

- $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
- $F(\lambda \mathbf{v}) = \lambda F(\mathbf{v})$

för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ och för alla skalärer λ.

Inom linjär algebra kallas linjära funktioner ofta för **linjära avbildningar** eller **linjära transformationer**.

Exempel

Uppgift

Är våra tidigare definierade funktioner G och F från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ linjära?

$$G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ e^{x-y} \\ (x+y)^2 \end{bmatrix}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ 3x \\ -x + 2y \end{bmatrix}$$

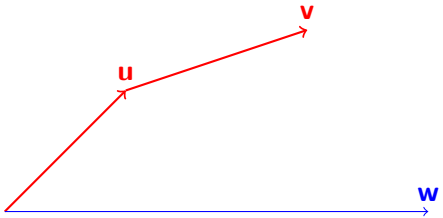
Exempel

Uppgift

Låt $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vara en fix vektor. Definiera en funktion $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ där $P(\mathbf{v})$ är projektionen av v på linjen genom origo i $\mathbf{w}$:s riktning. Är P linjär?

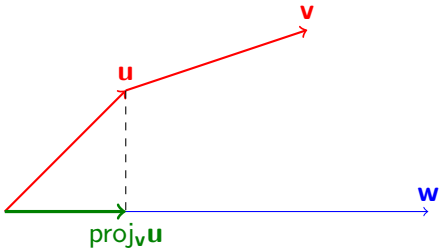
Visualisering

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} + \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$$



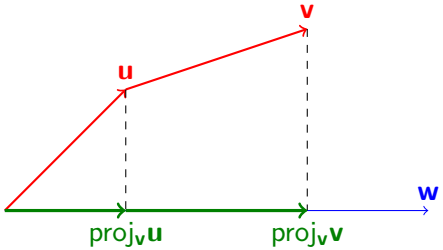
Visualisering

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} + \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$$



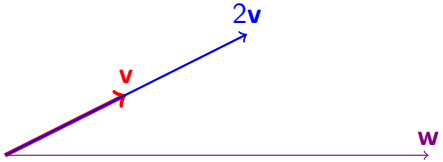
Visualisering

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} + \text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$$



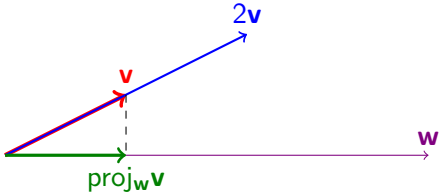
Visualisering

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \text{proj}_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$$



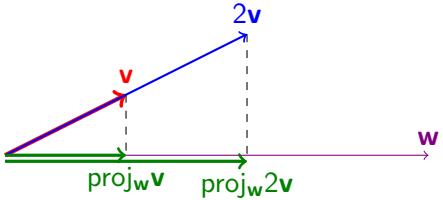
Visualisering

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \text{proj}_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$$



Visualisering

$$\text{proj}_{\mathbf{w}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \text{proj}_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$$



Exempel

Uppgift

Antag att F är linjär och $F(1,0) = (1,3,-1)$ och $F(0,1) = (1,0,2)$. Vad blir $F(7,5)$?

Exempel

Uppgift

Antag att F är linjär och $F(1,0) = (1,3,-1)$ och $F(0,1) = (1,0,2)$. Vad blir $F(7,5)$?

Vi använder linjäriteten:

$$F\left(\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}\right) = F\left(7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = F\left(7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + F\left(5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= 7F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 5F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = 7\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\21\\3\end{bmatrix}$$

Exempel

Uppgift

Antag att F är linjär och $F(1,0) = (1,3,-1)$ och $F(0,1) = (1,0,2)$. Vad blir $F(7,5)$?

Vi använder linjäriteten:

$$F\left(\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}\right) = F\left(7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = F\left(7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + F\left(5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= 7F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 5F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = 7\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\21\\3\end{bmatrix}$$

Slutsats

Om vi vet vart F skickar en uppsättning basvektorer så kan vi beräkna vart F skickar vilken vektor som helst.

Exempel

Uppgift

Antag att F är linjär och $F(1,0) = (1,3,-1)$ och $F(0,1) = (1,0,2)$. Vad blir $F(7,5)$?

Vi använder linjäriteten:

$$F\left(\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}\right) = F\left(7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = F\left(7\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + F\left(5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= 7F\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 5F\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = 7\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\21\\3\end{bmatrix}$$

Slutsats

Om vi vet vart F skickar en uppsättning basvektorer så kan vi beräkna vart F skickar vilken vektor som helst. Om $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ får vi $F(\mathbf{v}) = F(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1F(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nF(\mathbf{e}_n)$.

Exempel

Uppgift

Hitta ett explicit uttryck för den linjära avbildningen $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som projicerar planets punkter på linjen $\ell : \ 3x = 4y$.

Exempel

Uppgift

Hitta ett explicit uttryck för den linjära avbildningen $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som projicerar planets punkter på linjen $\ell : \ 3x = 4y$.

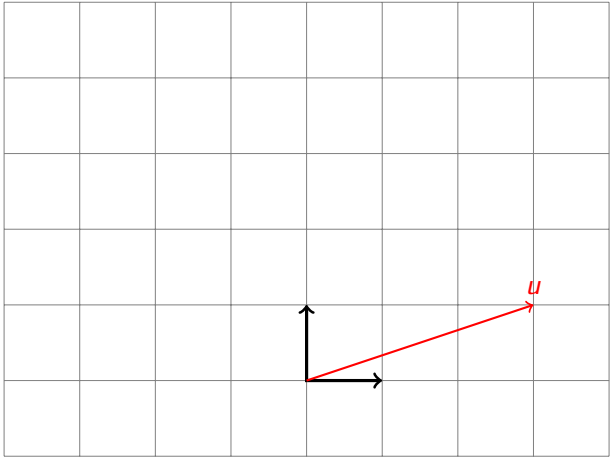
$$P(x, y) = (?, ?)$$

Del II

Visualisering av avbildningar i planet och rummet

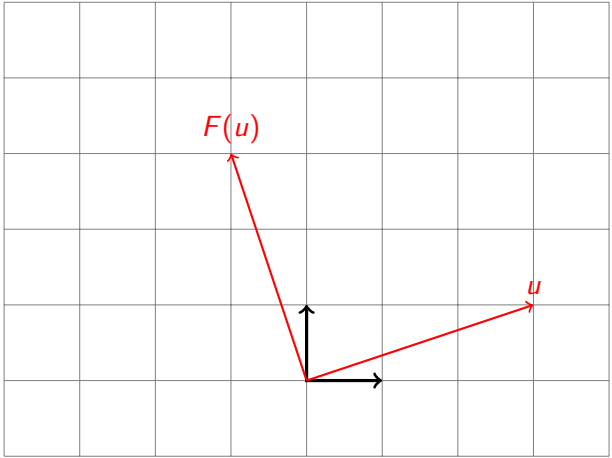
Att visualisera linjär avbildningar

Funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som transformationer av planet. Till exempel är $F(x, y) = (-y, x)$ avbildningen som roterar $\mathbb{R}^2$ med 90 grader moturs.



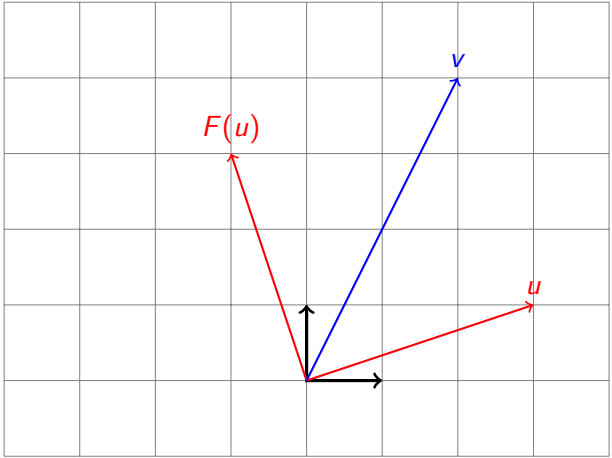
Att visualisera linjär avbildningar

Funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som transformationer av planet. Till exempel är $F(x, y) = (-y, x)$ avbildningen som roterar $\mathbb{R}^2$ med 90 grader moturs.



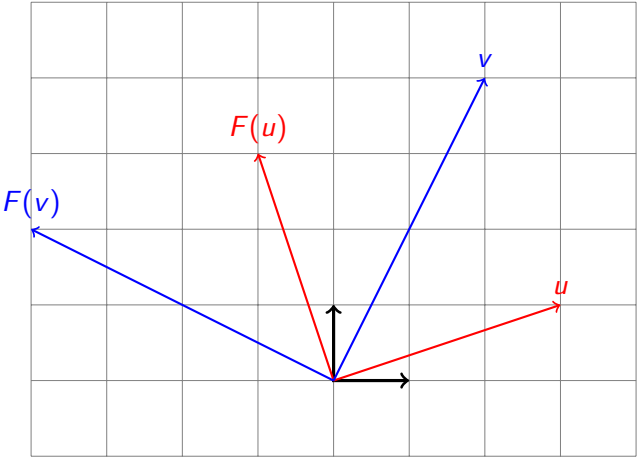
Att visualisera linjär avbildningar

Funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som transformationer av planet. Till exempel är $F(x, y) = (-y, x)$ avbildningen som roterar $\mathbb{R}^2$ med 90 grader moturs.



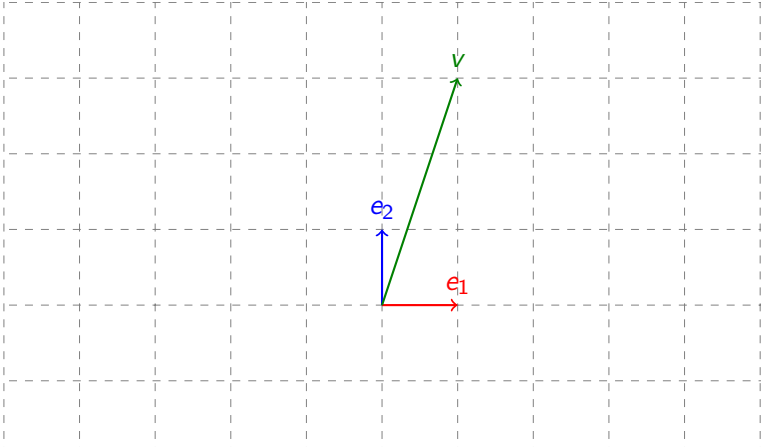
Att visualisera linjär avbildningar

Funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som transformationer av planet. Till exempel är $F(x, y) = (-y, x)$ avbildningen som roterar $\mathbb{R}^2$ med 90 grader moturs.



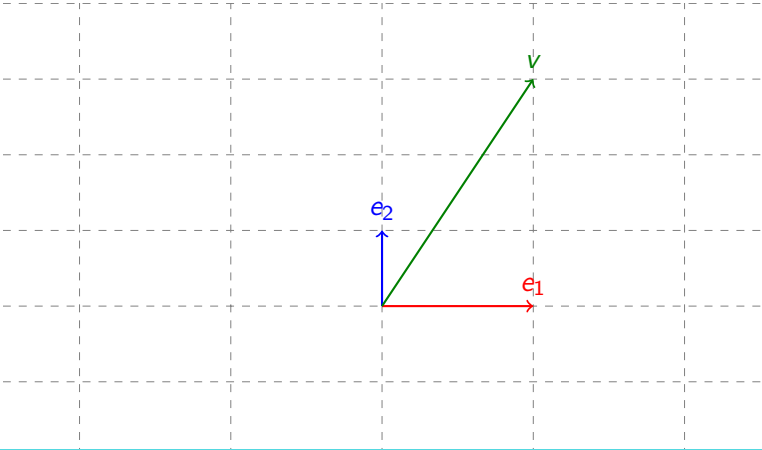
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Dilation i e_1-riktningen $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$



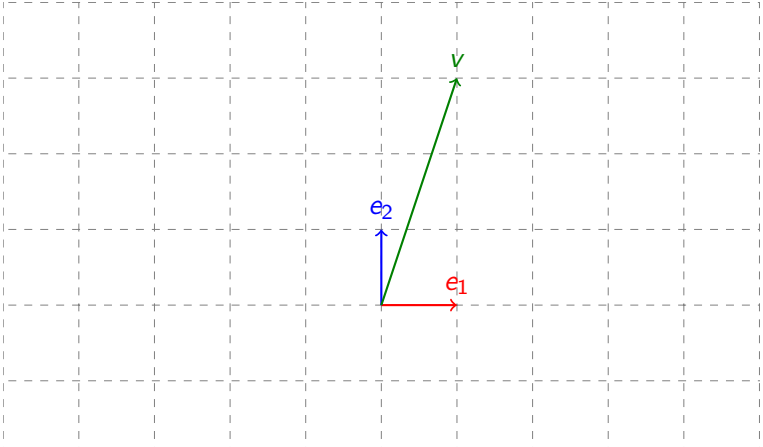
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Dilation i e_1-riktningen $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$



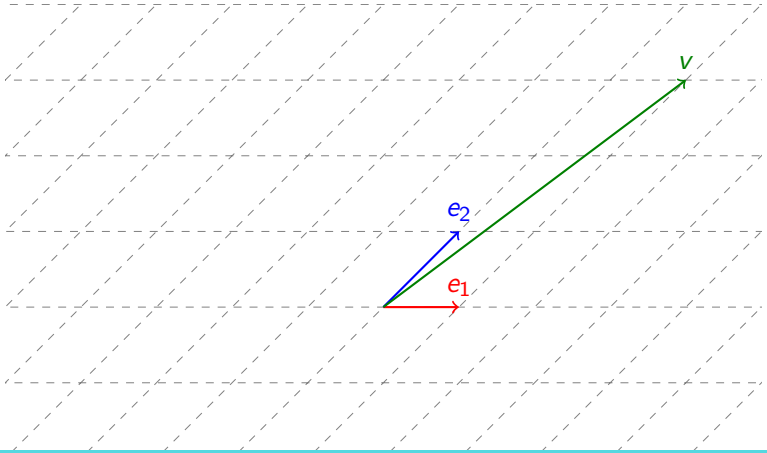
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Skjuvning $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$



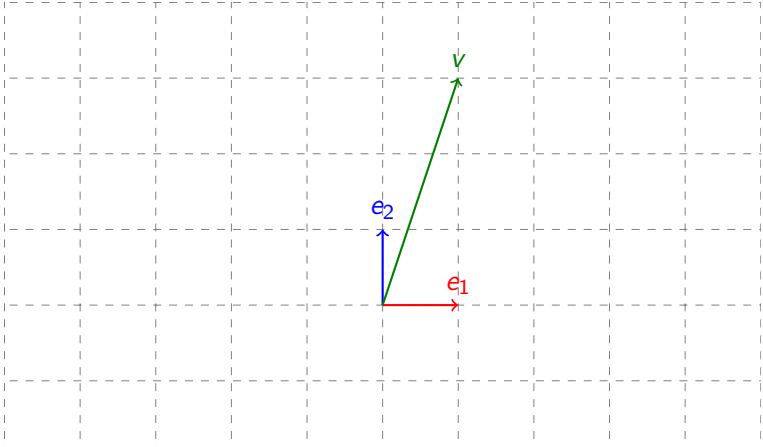
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Skjuvning $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$



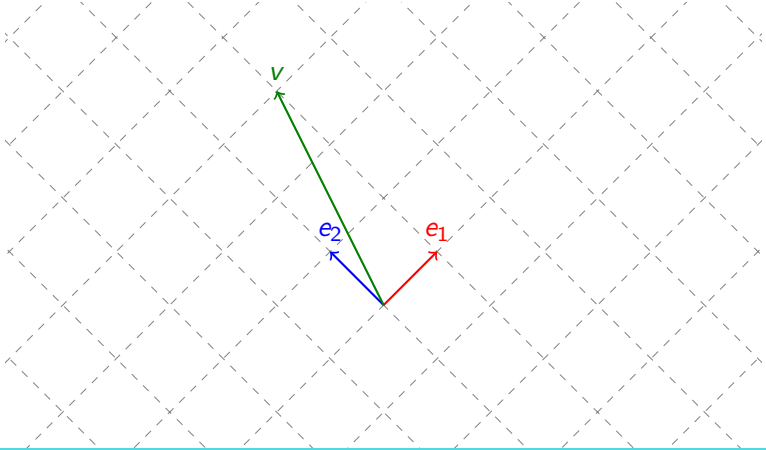
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Rotation med vinkeln $\frac{\pi}{4}$ $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$



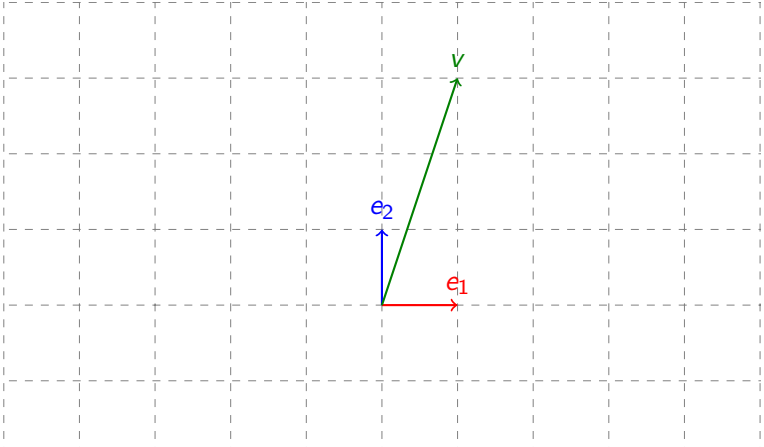
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Rotation med vinkeln $\frac{\pi}{4}$ $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$



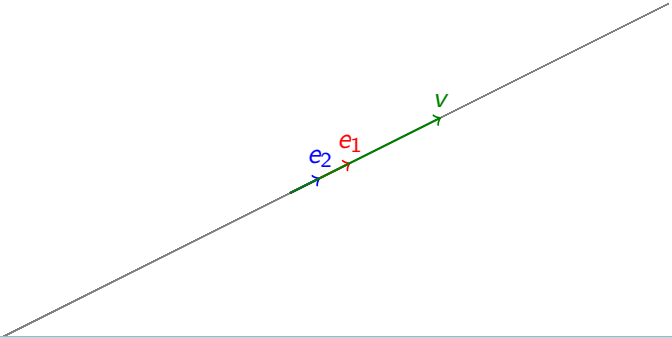
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Projektion linjen $2y = x$ $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$



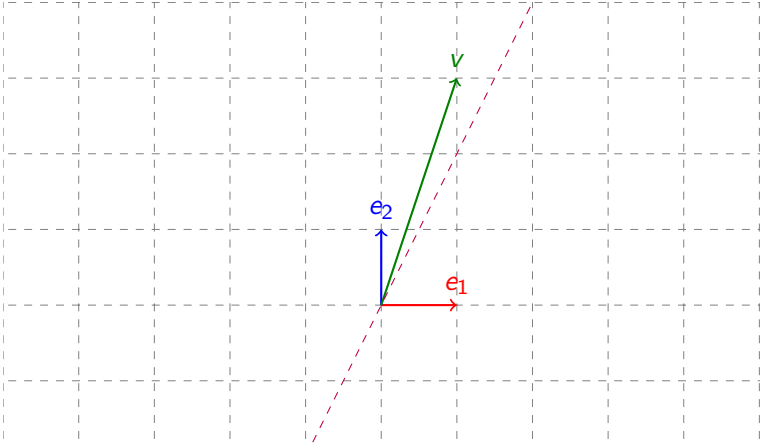
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Projektion linjen $2y = x$ $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$



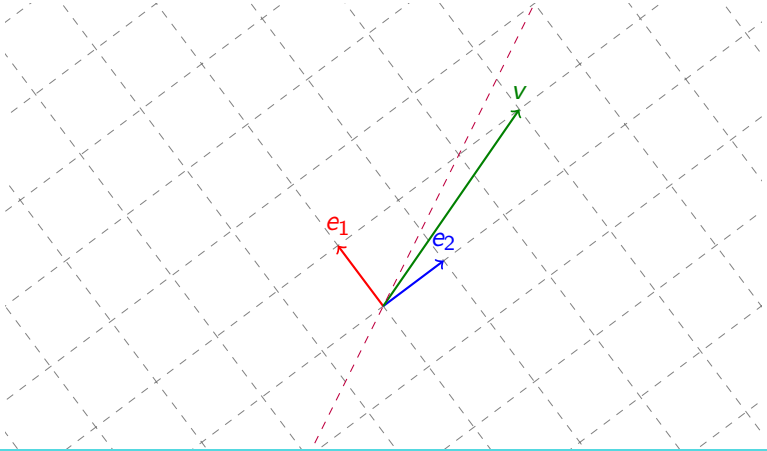
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Reflektion in linjen $y = 2x$ $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -x + 4y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$



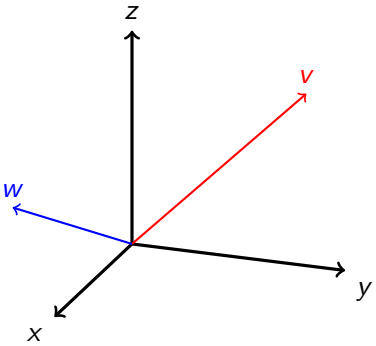
Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Reflektion in linjen $y = 2x$ $\quad F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -x + 4y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$



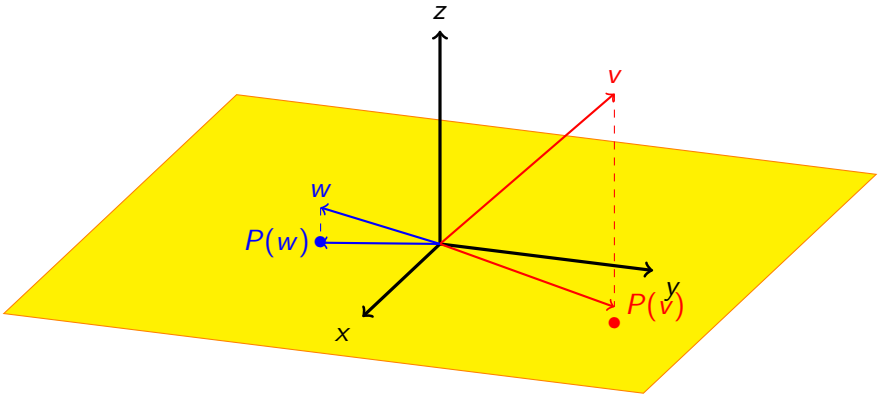
Linjära avbildningar i 3d

$P =$vinkelrät projektion på xy-planet $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ $\quad v = (1, 2, 2)$ och $w = \frac{1}{3}(1, -3, 1)$.



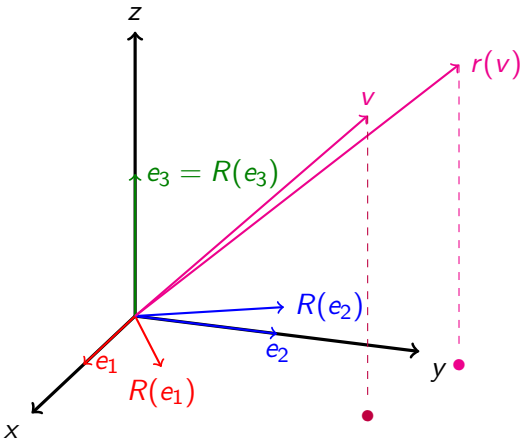
Linjära avbildningar i 3d

$P =$vinkelrät projektion på xy-planet $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ $\quad v = (1, 2, 2)$ och $w = \frac{1}{3}(1, -3, 1)$.



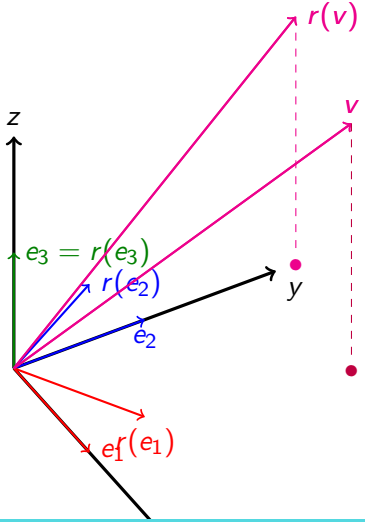
Linjära avbildningar i 3d

$R =$Rotation med $\frac{\pi}{6}$ kring z-axeln. $v = (1, 2, 2)$.



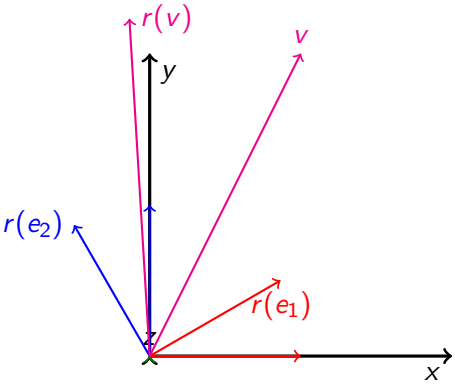
Linjära avbildningar i 3d

Samma bild från flera vinklar:



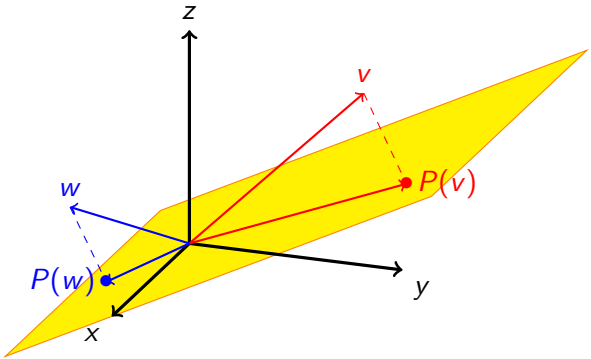
Linjära avbildningar i 3d

Samma bild från ovan:



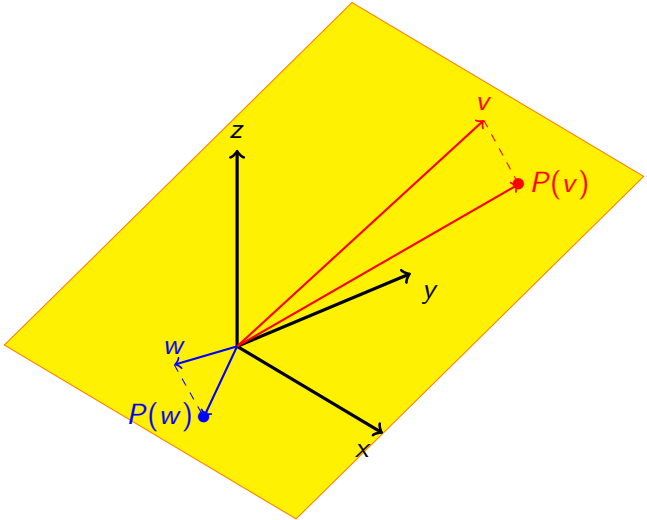
Linjära avbildningar i 3d

$P =$Vinkelrät projektion på planet $y - 2z = 0$. $v = (1, 2, 2)$ och $w = \frac{1}{3}(1, -3, 1)$.



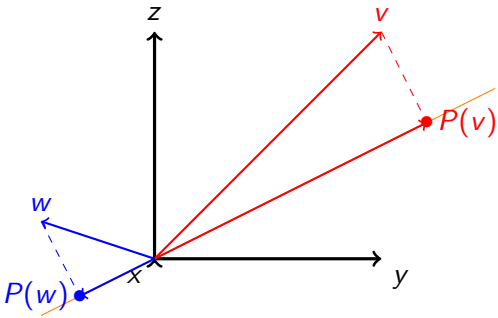
Linjära avbildningar i 3d

Ett annat perspektiv:



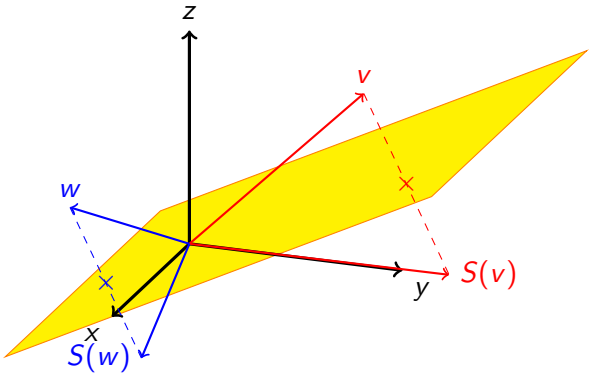
Linjära avbildningar i 3d

Sett från positiva x-axeln:



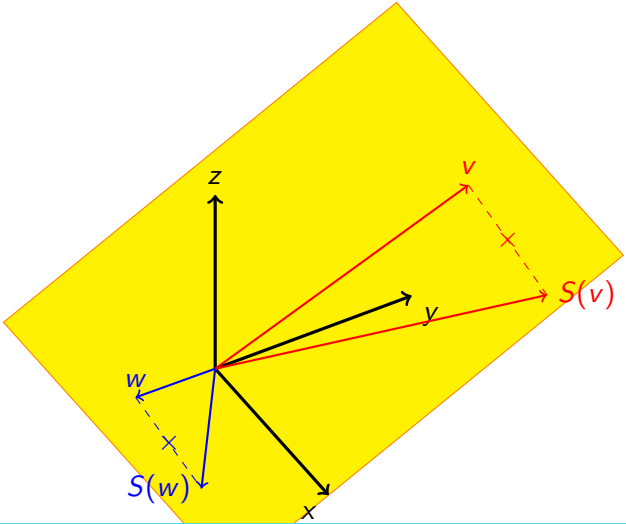
Linjära avbildningar i 3d

$S =$Reflektion i planet $y - 2z = 0$



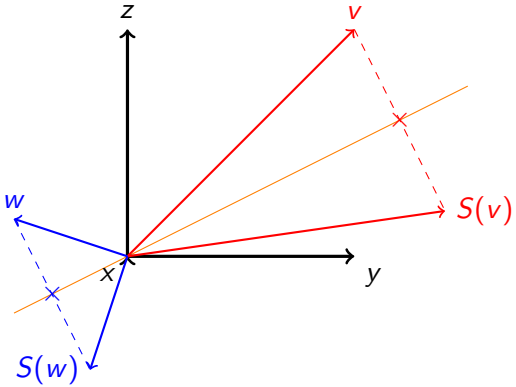
Linjära avbildningar i 3d

$S =$Reflektion i planet $y - 2z = 0$



Linjära avbildningar i 3d

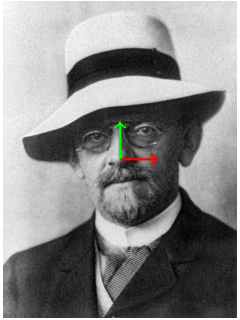
$S =$Reflektion i planet $y - 2z = 0$



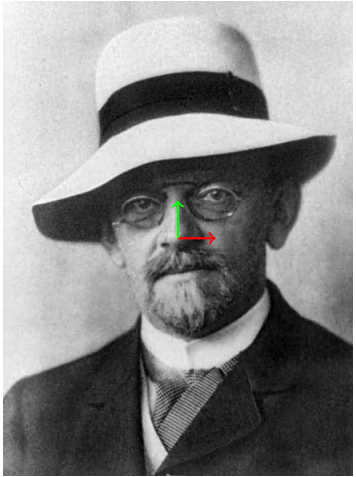
Alternativ visualisering

En avbildning $F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som en omvandling av en bild. För varje pixel med koordinat (x, y) flyttar vi den till koordinat $F(x, y)$.

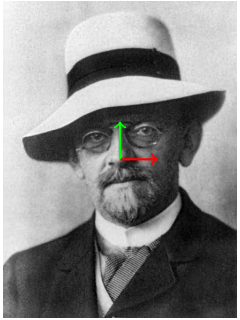
Dilation, $F(x, y) = \frac{3}{2}(x, y)$



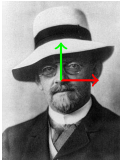
Dilation, $F(x, y) = \frac{3}{2}(x, y)$



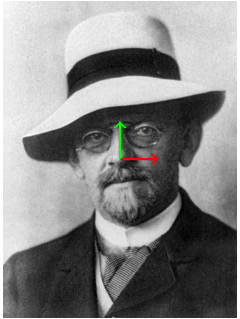
Kontraktion, $F(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$



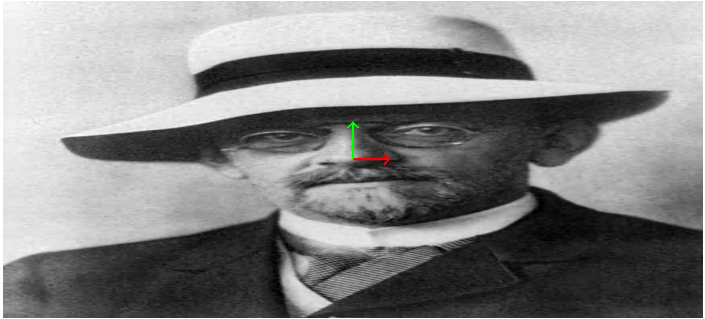
Kontraktion, $F(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$



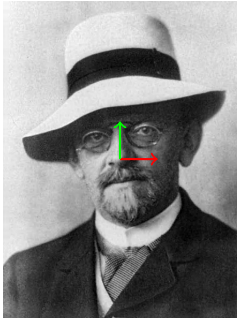
Dilation i x-led, $F(x, y) = (3x, y)$



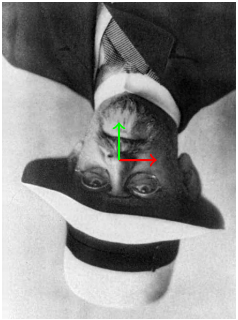
Dilation i x-led, $F(x, y) = (3x, y)$



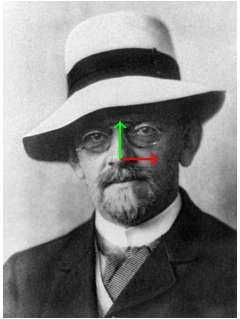
Reflektion i x-axeln, $F(x, y) = (x, -y)$



Reflektion i x-axeln, $F(x, y) = (x, -y)$

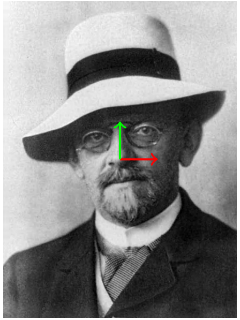


Projektion på y-axeln, $F(x, y) = (x, 0)$

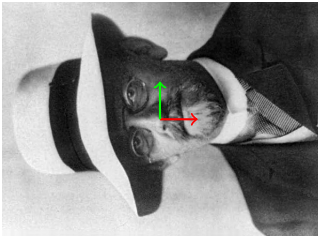


Projektion på y-axeln, $F(x, y) = (x, 0)$

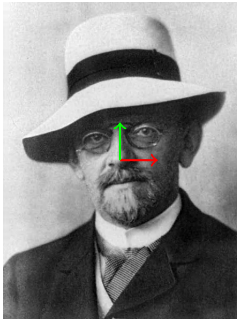
Rotation $\frac{\pi}{2}$, $F(x, y) = (-y, x)$



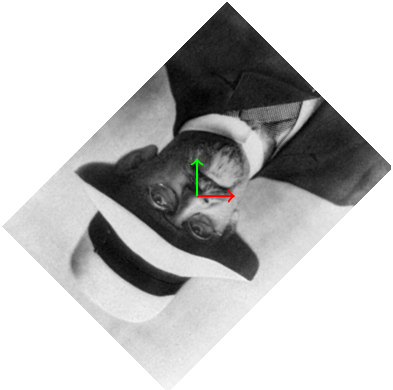
Rotation $\frac{\pi}{2}$, $F(x, y) = (-y, x)$



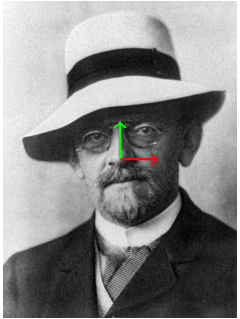
Rotation $\frac{3\pi}{4}$, $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - y, x - y)$



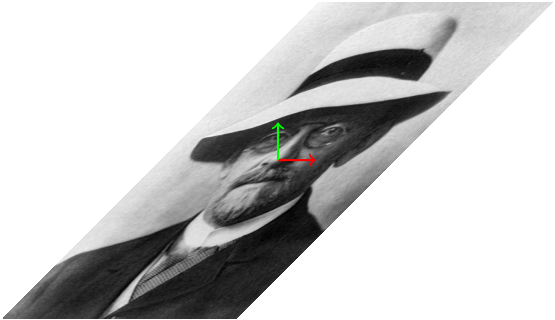
Rotation $\frac{3\pi}{4}$, $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - y, x - y)$



Skjuvning, $F(x, y) = (x + y, y)$



Skjuvning, $F(x, y) = (x + y, y)$



Exempel

Uppgift

Hitta ett explicit uttryck för den linjära avbildningen S som speglar rummets punkter i planet $\pi: \ x + 2y + 2z = 0$.

Exempel

Uppgift

Hitta ett explicit uttryck för den linjära avbildningen S som speglar rummets punkter i planet $\pi: \ x + 2y + 2z = 0$.

$$S(x, y, z) = (?, ?, ?)$$