Inlämningsuppgift I

Linjär algebra · ETE325 · VT2024 · Jonathan Nilsson

Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar. Skriv lösningarna för hand, använd inte rödpenna. Skriv max en uppgift per sida och lämna in uppgifterna i nummerordning.

Lämnas in: Senast klockan 18.00 den 25/3 2024. Lämna in handskrivet på ihophäftade papper på föreläsningen. Lösningarna kan annars lämnas i facket märkt ETE325 i B-huset en trappa upp från ingång 21. Sena inlämningar accepteras ej.

Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt 0-4 bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-6 poäng, så total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är 30+30=60 poäng. En total poängsumma på $20/30/40/50$ ger $1/2/3/4$ bonuspoäng till kursens tenta, totalpoängen på tentan är 42. Bonuspoängen kan användas vid kursens tre examenstillfällen, i maj 2024, augusti 2024, och januari 2025.

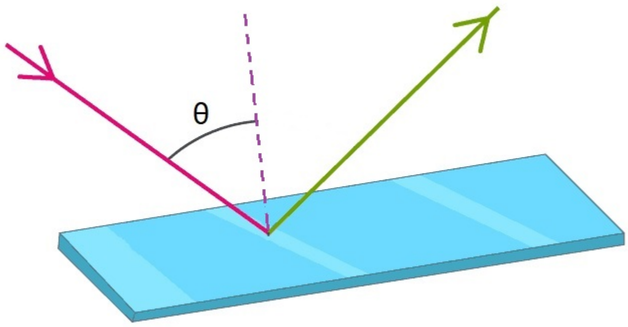
1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Beräkna determinanterna $\det(A)$ och $\det(B)$.

   (b) Hitta inversen till B.

   (c) Lös matrisekvationen $AX - A = A^2 - 2A^t - X$.

2. En ljusstråle färdas längs linjen $(x, y, z) = (3 - 2t, 1 + t, -1 + t)$ där $t \in \mathbb{R}$. Strålen reflekteras i planet med ekvation $2x + y + z = 0$. Beräkna infallsvinkeln θ och ta fram en parameterform för den reflekterade strålen.



3. Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Lös ekvationssystemet $AX = \mathbf{0}$. Här är X alltså som vanligt en kolonnmatris $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$.

   (b) Låt $\mathbb{U}$ vara underrummet av $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av kolonnerna i A. Ange dimensionen för $\mathbb{U}$ och välj en bas för $\mathbb{U}$.

   (c) Vektorn $\mathbf{v} = (\frac{5}{2}, 3, 2)$ tillhör $\mathbb{U}$. Ange koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den bas du valde i föregående deluppgift.

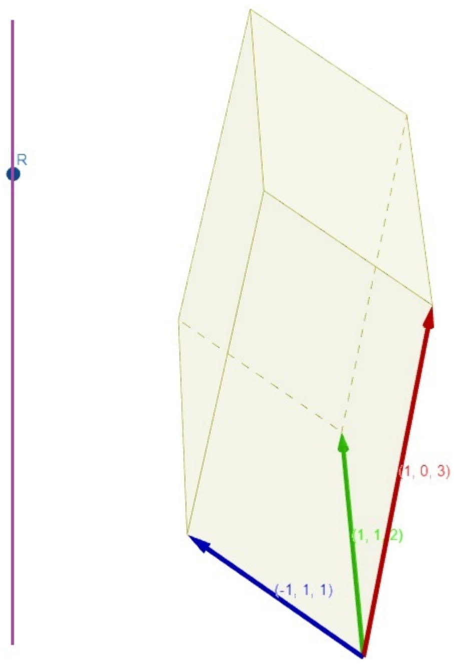
4. En parallellepiped ges av

$$\mathcal{P} = \{x_1(1,0,3) + x_2(1,1,2) + x_3(-1,1,1)\ ;\ 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1\},$$

alltså mängden linjärkombinationer av de tre vektorerna där alla koefficienter ligger mellan 0 och 1.

   (a) Beräkna parallellepipedens volym.
   (b) Ligger punkten $Q = (1,1,4)$ i parallellepipeden?
   (c) ⚔ Den lodräta linjen $\ell : (x,y,z) = (-2,2,t)$, där $t \in \mathbb{R}$ passerar utanför parallellepipeden. Avgör för varje punkt R på linjen *hur många* av parallellepipedens sidor som är synliga från R (parallellepipeden är ogenomskinlig).

☞ *Tips: Inför ett nytt koordinatsystem där basvektorerna är de tre vektorerna i definitionen av $\mathcal{P}$, uttryck sedan Q och ℓ i det nya koordinatsystemet. Jämför med Exempel 5.6.2 på sidan 131 i kursboken.*



5. Vi kallar en matris *"supersymmetrisk"* om den både är spegelsymmetrisk och rotationssymmetrisk: både lodrät spegling, vågrät spegling, samt rotation en kvarts varv lämnar matrisen oförändrad. Matriserna nedan är båda supersymmetriska.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi & \pi & 1 \\ 1 & \pi & \pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathfrak{ss}_n$ vara mängden av alla supersymmetriska $n \times n$-matriser.

   (a) Visa $\mathfrak{ss}_n$ är ett underrum till vektorrummet av alla $n \times n$-matriser.
   (b) Visa att supersymmetriska matriser är symmetriska: $A \in \mathfrak{ss}_n$ medför $A^t = A$.
   (c) Ta fram en bas för $\mathfrak{ss}_3$ och hitta koordinaterna för matrisen A ovan i din bas.
   (d) Ta fram en bas för $\mathfrak{ss}_4$ och hitta koordinaterna för matrisen B ovan i din bas.
   (e) ⚔ Beräkna dimensionen av $\mathfrak{ss}_n$ för varje heltal $n > 0$.