Inlämningsuppgift II

Linjär algebra ETE325 VT2024 Jonathan Nilsson

Instruktioner: Skriv tydligt namn, personnummer, och program (om du går ett) på första sidan. Uppgifterna ska lösas självständigt och utan digitala hjälpmedel. Skriv fullständiga lösningar med tydliga svar. Skriv lösningarna för hand, använd inte rödpenna. Skriv max en uppgift per sida och lämna in uppgifterna i nummerordning.

Lämnas in: Senast klockan 17.00 den 15/5 2023. Lämna in i pappersform på föreläsningen. Lösningarna kan annars lämnas i facket märkt ETE325 en trappa upp från ingång 21 i B-huset. Sena inlämningar accepteras ej.

Bonuspoäng till tentan: Dessa inlämningsuppgifter är **inte obligatoriska** men de ger gemensamt 0-4 bonuspoäng till kursens tentamen. Varje uppgift nedan bedöms som 0-6 poäng, så total maxpoäng på inlämningsuppgifterna är $30 + 30 = 60$ poäng. En total poängsumma på $20/30/40/50$ ger $1/2/3/4$ bonuspoäng till kursens tenta, totalpoängen på tentan är 42. Dessa bonuspoäng kan användas vid kursens tre examenstillfällen, i maj 2024, augusti 2024, och januari 2025.

1. Låt $\mathbb{U} = [(1,0,0,0),(1,1,1,1),(1,2,3,1),(2,1,2,0)]$. Använd Gram-Schmidt för att ta fram en ON-bas för $\mathbb{U}$. Ange sedan den vektor i $\mathbb{U}$ som ligger närmast vektorn $v = (1,2,3,4)$.

2. (a) Ta fram matrisen för avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först speglar planets vektorer i x-axeln och sedan speglar dem i linjen $x + y = 0$. Beskriv den sammansatta avbildningen geometriskt.

   (b) Ge en fullständig geometrisk beskrivning av vad avbildningen G gör med rummets vektorer, där avbildningsmatrisen ges av
   $$[G] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Ta fram alla egenvärden och egenvektorer för avbildningarna nedan

   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $F(x,y,z) = (x+z, y+z, x+y+2z)$

   (b) $G : M_2 \to M_2$ där $G(A) = A - A^t$ (här är M_2 vektorrummet av 2×2-matriser)

   (c) $H : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ där $H(p(x)) = xp'(x)$ (här är $\mathcal{P}$ vektorrummet av alla polynom)

4. Hitta den cirkel på formen $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ som i minstakvadratmening bäst approximerar följande punkter:

x	0	1	0	2
y	0	0	2	2

   Ange även cirkelns radie och medelpunkt och rita en skiss som visar cirkeln tillsammans med de fyra punkterna.

5. Låt $\mathcal{C}[0,1]$ vara det euklidiska rummet av kontinuerliga funktioner definierade på intervallet $[0,1]$ där skalärprodukten ges av $(f(x)|g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Låt vidare $\mathcal{P}_1$ vara underrummet till $\mathcal{C}[0,1]$ som består av alla polynom av grad högst 1, alltså $\mathcal{P}_1 = \{p(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Använd Gram-Schmidt för att ta fram en ON-bas för $\mathcal{P}_1$.

   (b) Hitta den funktion $p(x)$ i $\mathcal{P}_1$ som ligger närmast funktionen $g(x) = \sqrt{x}$, alltså den funktion för vilken $|p(x) - g(x)|$ är minimalt, där $|f|$ som vanligt betyder $\sqrt{(f|f)}$. Rita även graferna för funktionerna $p(x)$ och $g(x)$ i samma bild.