Tentamen på kursen ETE325: Linjär algebra

Den 29 maj 2023 klockan 08:00-13:00

Linköpings Universitet, Matematiska Institutionen

Examinator: Jonathan Nilsson

Inga hjälpmedel är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 3p. Maxpoäng är 21p. För betyg 3/4/5 krävs minst 10/14/18 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag publiceras på kurshemsidan ett par timmar efter ordinarie skrivtid är slut.
Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas i $\mathbb{R}^n$ om inget annat anges.

---

1. (a) Ta fram alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 6y + z + 8w = 9 \\ 2x + 4y + 5z + w = 19 \\ x + 2y + z + 2w = 5 \\ 2x + 4y + 6w = 4 \end{cases}$$

   (b) Kan man ändra en enda siffra i ekvationssystemet ovan så att det resulterande systemet saknar lösningar? Motivera ditt svar.

2. Låt $\mathbb{U} = [(1,-1,-1,1), (2,-1,-1,1), (1,1,1,-1)]$ vara ett underrum av $\mathbb{R}^4$.

   (a) Ta fram en ON-bas för $\mathbb{U}$.

   (b) Skriv $v = (1,2,3,0)$ som en summa $v = v' + v''$ där $v' \in \mathbb{U}$ och $v'' \in \mathbb{U}^\perp$.

3. (a) För vilka värden på x är matrisen $C = \begin{bmatrix} x & 2x & 13x \\ x & x & 2 \\ 1 & 1 & x+1 \end{bmatrix}$ inverterbar?

   (b) Sätt nu $x = -1$ i matrisen C ovan. Ta fram inversen till matrisen C i detta specialfall.

   (c) Ange definitionen av inversen till en matris A. Använd definitionen för att visa att om en matris A uppfyller $A^2 + 3A - I = 0$ så har A en invers.

4. Ange den andragradskurva på formen $y = ax^2 + b$ som i minstakvadratmening ligger närmast de fyra punkterna $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, och $(2,1)$ i xy-planet. Skissa också kurvan och de fyra punkterna i samma koordinatsystem.

5. (a) Ta fram avbildningsmatrisen för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som speglar rummets vektorer i planet $x - y + 3z = 0$.

   (b) Vi definierar en ny avbildning $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ där $G(v) = v - F(v)$. Ge en fullständig geometrisk beskrivning av G, ange också dess egenvärden och egenvektorer. *Tips: Uppgiften kan lösas utan att ta fram matrisen för G.*

6. Lös systemet av differentialekvationer nedan. Ange också den lösning som uppfyller $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 2$, och $x_3(0) = -1$.

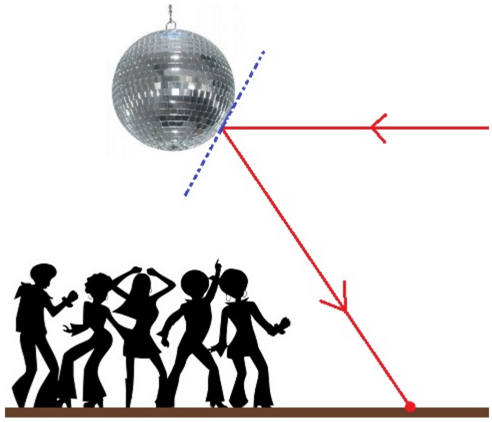
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) - 5x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

Vänd!

7. En diskokula med radie 3 är upphängd i taket så att dess centrum ligger i $(0, 0, 33)$ (alla längdmått kan antas vara i decimeter). En ljusstråle färdas längs linjen

$$(x, y, z) = (4 - t, 6 - 2t, 32)$$

där $t \in \mathbb{R}$ är tiden i någon enhet. Strålen träffar kulan och reflekteras. Ange den punkt där den reflekterade strålen träffar golvet. Golvets ekvation är $z = 0$.



Tips: Hitta skärningspunkten mellan linjen och sfären och ta sedan fram tangentplanet till sfären i skärningspunkten, det är i detta plan som strålen reflekteras.

Lycka till!