

Linköpings Universitet
Tentamen på kursen i linjär algebra: ETE325/TEN1
Den 2023-08-18 kl 14.00-19.00
Examinator: Jonathan Nilsson

Endast skrivverktyg är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 3p. Maxpoäng är 21p. För betyg 3/4/5 krävs minst 10/14/18 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag publiceras på kurshemsidan ett par timmar efter ordinarie skrivtid är slut. Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas i \mathbb{R}^n om inget annat anges.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen $XA = A^t - 3X$.
2. Punkterna $(1, 2, 3)$ och $(4, 5, 6)$ ligger på en linje ℓ_1 . De två planen $x - y + z = 3$ och $2x + y + z = 1$ skär varandra längs en annan linje ℓ_2 . Beräkna avståndet mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2 .
3. Ange en ON-bas för \mathbb{R}^4 så att den första basvektorn är parallell med $(1, 1, 1, 1)$. Ange sedan koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i din valda bas.
4. (a) Ange definitionen av begreppet *isometrisk avbildning*.
(b) Ge en fullständig geometrisk beskrivning av den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vars standardmatris är
$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
5. En talföljd ges rekursivt av $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, och
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - \frac{3}{4}a_n \quad \text{för } n \geq 0.$$
 - (a) Ta fram ett explicit uttryck för a_n .
 - (b) Om man behåller rekursionssambandet och att $a_0 = 1$, men ändrar värdet på a_1 fås en annan talföljd. Går det att välja ett nytt värde för a_1 så att $a_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$?
6. Avgör huruvida kurvan $7x_1^2 - 2x_2^2 + 12x_1x_2 = 20$ beskriver en ellips eller en hyperbel. Om det är en ellips anger du de punkter på kurvan som ligger närmast respektive längst från origo, och om det är en hyperbel anger du punkterna på kurvan närmast origo samt kurvans asymptoter. Inkludera också en detaljerad skiss över kurvan.
7. En triangel har sina hörn i $P = (5, 0, 2)$, $Q = (-3, -3, -2)$, och $R = (2, 1, 1)$. En kula avfyras och färdas längs linjen $(x, y, z) = (1 + t, t, 2t)$. Passerar kulan genom triangeln?

Lycka till!