Lösningsförslag ETE 325 190527

1. a) Inversen beräknas med eliminering av

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ och ger } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right),$$

dvs inversen är $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix}(-1) & (1) & (-2)\end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Big/ \text{utv. längs första kol.} \Big/$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Big/ \text{Sarrus} \Big/ = 2\cdot 0 - 3\cdot 5 - 5\cdot 3 - 0 - 1 - 2$$

$$= \underline{-32}$$

c) Normalekv $A^tAX = A^tY$ blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{: } \underline{\text{Svar}}$$

2. a) Två vektorer parallella med planet är t.ex.

$$\bar{u} = \overline{AB} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \overline{AC} = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},$$

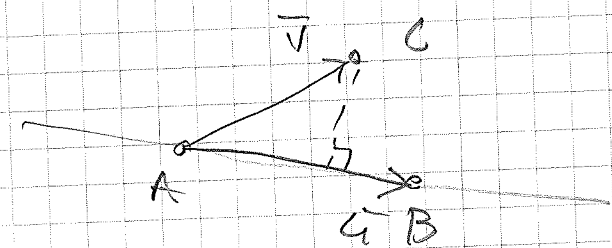
så en normal till planet är

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$ vilket ger

$$x - 2y + z = 1 + 2 = 3$$

Svar $x - 2y + z = 3$

b)



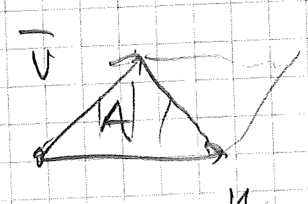
$\bar{u}$ är en riktn. vektor för linjen.

Projektion av $\bar{v}$ på $\bar{u}$ ger avståndet

$$\left|\bar{v} - \bar{v}_{/\!/\bar{u}}\right| = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

c) Enl. def. av vektorprod. är arean

$$A = \frac{1}{2}\left|\bar{u} \times \bar{v}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



3. Vi bildar matrisen

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{med} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Att T är inverterbar visar att $f_1\, f_2\, f_3$ bildar bas.

(Alt: beroendekr el $\det T \neq 0$)

b) Vi har

$$(f_1\ f_2\ f_3) = (e_1\ e_2\ e_3)\,T,$$

så

$$(e_1\ e_2\ e_3) = (f_1\ f_2\ f_3)\,T^{-1}.$$

Med andra ord:

$$\begin{cases} e_1 = 2f_1 + 2f_2 - 5f_3 \\ e_2 = \quad\quad\ \ f_2 - f_3 \\ e_3 = -f_1 - 2f_2 + 4f_3 \end{cases}$$

c) Sambandet $X = TY \Leftrightarrow Y = T^{-1}X$

mellan koord X i basen $\underline{e}$ och Y i basen $\underline{f}$ ger

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

dvs $\bar{v} = 3\bar{f}_1 + 0\bar{f}_2 - 4\bar{f}_3$

4. I en ON-bas av egenvektorer kan ekv. skrivas

$$7y_1^2+2y_2^2=1 \iff \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}+\frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

vilket ger en ellips med minsta avst $\frac{1}{\sqrt{7}}$ till origo i $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(2,1)$

och största $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2)$

5. a) F har avb. matris $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

med egenvärden $\lambda=1$ (dubbelt)

och $\lambda=-1$

En ON-bas är (t.ex)

$$\bar f_1=\underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \bar f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \bar f_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

b) Kolonnerna i A bildar en ON-bas, så F är en isometri.

det A = −1 så F är en (vrid)spegling.

Matrisen för F i basen $\bar f_1 \bar f_2 \bar f_3$ blir

$$A_f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$ och vi ser

att F är en spegling i planet som spänns upp av $\bar f_1$ och $\bar f_2$: $-x_1+x_3=0$

6. En ON-bas för U är (t.ex.)

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

som utvidgas med $\bar{f}_4 = \frac{1}{2}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

7. (a) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär om

$$F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v}) \quad \text{för alla } \bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}^n,$$

$$F(t\bar{u}) = tF(\bar{u}) \quad \text{för alla } t\in\mathbb{R},\ \bar{u}\in\mathbb{R}^n$$

Ex Avbildningen $F(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+2x_2)$

är linjär, (ty $F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$)

och $F(1,1) = (1,\ 1+1,\ 1+2) = (1,2,3)$.

b) Vi får $F(\bar{e}_1) = F(1,0,0) = \frac{1}{3}(2,-1,2)$,

$$F(\bar{e}_2) = F(0,1,0) = F(1,1,0) - F(1,0,0)$$

$$= \frac{1}{3}(1,1,4) - \frac{1}{3}(2,-1,2) = \frac{1}{3}(-1,2,2).$$

Detta ger de två första kol. i avb.matr.

A för F. Eftersom A ska vara

ortonormal, ska kol. bilda en ON-bas och därför är tredje kol. lika med

$$\pm F(\bar{e}_1) \times F(\bar{e}_2) = \pm \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Så F har matris

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ el } \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Med dessa matriser blir

$$F(1,1,1) = \frac{1}{3}(3, 3, 3) = (1,1,1)$$

eller $F(1,1,1) = \frac{1}{3}(-1, -1, 5)$