ETE325 Linjär algebra

Lösn till tentamen 190829

1a)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (1)\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -9 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{utv.} \\ \text{längs} \\ \text{rad } 2 \end{matrix} \right|$$

$$= - \begin{vmatrix} -5 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -9 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \left| \text{Sarrus} \right| = \underline{-36}$$

1b)

$$AX - B = BX \iff AX - BX = B$$

$$\iff (A - B)X = B$$

$$\iff X = (A - B)^{-1} B$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ger}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. b) $AX = 0 \iff \ldots \iff \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$

med lösn $\begin{cases} x_1 = 2r \\ x_2 = -r - 2s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \\ x_5 = 0 \end{cases}$

så $N(F)$ har bas t.ex $\left\{ \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

och en bas för $V(F)$

är t.ex $\left\{ \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. b) Egenvärden $0, 1$ med

egenvektorer $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

resp.

c) A^2 har samma egenvektorer

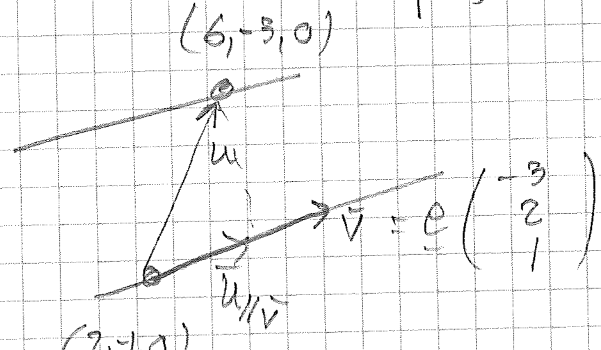
och egenvärden som ~~A~~ i 3b)

$F \circ F(\bar{v}) = F(F(\bar{v})) = A^2 \bar{v} = \lambda^2 \bar{v}$

om $\bar{v}$ är en egenvektor till F.

4. Skärningslinjerna är

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3t \\ x_2 = -1 + 2t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x_1 = 6 - 3t \\ x_2 = -3 + 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$



Minsta avståndet ges enligt bilden, av

$$\left| \bar{u} - \bar{u}_{//\bar{v}} \right| = \frac{\sqrt{168}}{7} = \underline{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

5. Den kvadratiska formen ger upphov till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{med}$$

egenvärden $3, 3, 6$ (dvs 3 är dubbel)

En ON-bas av egenvektorer är t.ex

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och i denna bas blir ekv

$$3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 = 12,$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + \frac{y_3^2}{2} = 1$$

Så ytan är en ellipsoid med

halvaxlarna 2, 2 och $\sqrt{2}$

Närmast origo på avst $\sqrt{2}$ är

punkterna $\pm\sqrt{2}\cdot \bar{f}_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

dvs $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

På största avståndet 2 från origo

ligger punkterna på cirkeln

$$y_1^2 + y_2^2 = 2^2 \quad (y_3 = 0),$$

dvs på en cirkel med centrum i origo
och radie 2
i planet som spänns upp av

$\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$, dvs $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

($\bar{f}_3$ normal)

6. Med $\bar{f}_1 = \frac{1}{2}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ger

Gram-Schmidt och $\bar{e}_1$ vektorn

$$\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\underline{e}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Vektorn $\bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ är inte en linjärkomb. av $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ (ty ej komb. av $\bar{f}_1, \bar{e}_1$)

Gram Schmidt igen ger

$$\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{e}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

så t. ex $U = [\bar{f}_1, \bar{e}_1, \bar{e}_2] = [\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3]$

innehåller de givna vektorerna, med ON-bas $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

7. b) Tag $\bar{u}, \bar{v} \in U_1 \cap U_2$, $t \in R$.

Då $\bar{u}, \bar{v} \in U_1$ så $\bar{u}+\bar{v} \in U_1$ och $t\bar{u} \in U_1$ eftersom U_1 är ett underrum.

På samma sätt är $\bar{u}+\bar{v} \in U_2$ och $t\bar{u} \in U_2$. Det följer att

$\bar{u}+\bar{v} \in U_1 \cap U_2$ och $t\bar{u} \in U_1 \cap U_2$

och vi är klara.