Lösningar Tenta ETE325
Linjär algebra 200116

1.

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \overset{(-2)}{} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -3y+3z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = t \end{cases}$

Svar: $(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + t(0,1,1), \; t \in \mathbb{R}$

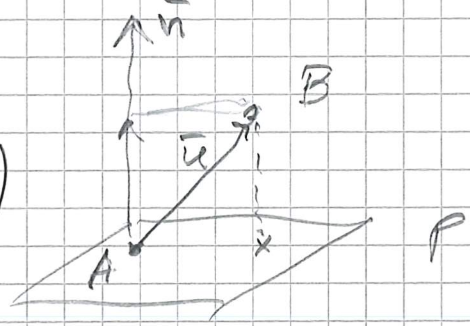
b) Normal till P: $\bar{n} = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ekv $\quad 0x + 1\cdot y + 1\cdot z = D \Leftrightarrow y+z=D$

$A=(1,-2,3)$ i P: $\quad -2+3=D$ ger $D=1$

Svar: $y+z=1$

c)



Projicera $\bar{u} = \overline{AB} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ på $\bar{n}$ och beräkna längden:

$$|\bar{u}_{//\bar{n}}| = \left| \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|n|^2}\,\bar{n} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Svar: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Skärningspunkt , $t, s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3 + t = -a + 2s \\ -2 - 2t = -1 + s \\ a + t = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s - t = 3 + a \\ s + 2t = -1 \\ s - t = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2s - t = 3 + a \\ s + 2t = -1 \\ -s = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ t = -2 \\ s = 3 \end{cases}$$

Svar: $a = 5$ ger skärningspunkt

$$(x, y, z) = (3 - 2, -2 + 2 \cdot 2, 5 - 2) = (1, 2, 3)$$

3.

$$AXB + AB = BA \Leftrightarrow AXB = BA - AB$$

$$\Leftrightarrow XB = A^{-1}(BA - AB) \Leftrightarrow X = A^{-1}(BA - AB)B^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}BAB^{-1} - I .$$

Beräkning ger

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

så

$$X = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} -28 & -5 & 67 \\ 5 & 0 & -12 \\ 18 & 3 & -48 \end{pmatrix}$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Egenvärden:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 40 - 13\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$
$$= (\lambda - 9)(\lambda - 4),$$

dvs $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 9}$: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\,\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 4}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\,\underline{e}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

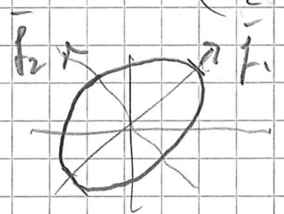
Välj ny ON-bas $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{e}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

så att ekv. blir

$$9y_1^2 + 4y_2^2 = 180, \quad \text{där} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dvs $$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{10} = 1.$$



Ekvationen beskriver en ellips med halvaxellängderna $\sqrt{20}$ och $\sqrt{10}$.

Störst $\sqrt{20}$ är $\pm\sqrt{20}\,\bar{f}_1 = \pm\sqrt{20}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm 2\,\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Minst $\sqrt{10}$ är $\pm\sqrt{10}\,\bar{f}_2 = \pm\sqrt{2}\,\underline{e}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svar: Störst avstånd $\sqrt{20}$ i
$\pm(2,4)$

Minst avstånd $\sqrt{10}$ i

$\pm(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

5. Med Sarrus regel får vi egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) + (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda),$$

dvs $0, 1, 2$.

Egenrummen fås ur

$\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$ egenrum $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$\lambda = 1$ $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$\lambda = 2$ $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Vi har nu, med $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

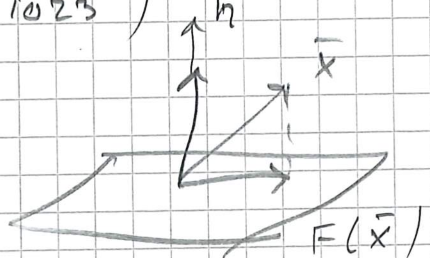
att $A^{10} = T D^{10} T^{-1}$, där $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

eftersom $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, blir $(2^{10} = 1024)$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1023 & 1 & -1023 \\ 1023 & -1 & 1023 \end{pmatrix}$$

6) a) Sätt $\bar{n} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ till normalen för planet. Vi väljer en ON-bas av egenvektorer för F:



$\bar{f}_1 = \frac{1}{3}\bar{n} = \frac{1}{3}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (i planet)

och $\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{3}\underline{e}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärden 0, 1, 1 resp.)

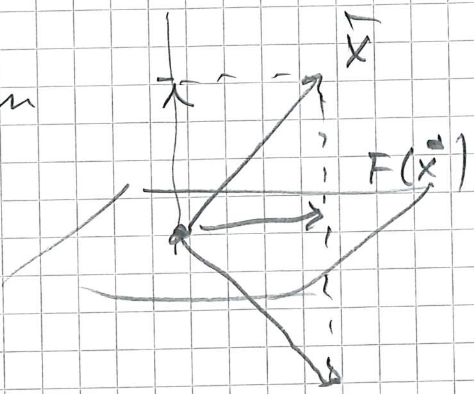
Med $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ blir $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

och

$$A = A_e = T A_f T^{-1} = \| T^{-1} = T^t \| = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(alt proj. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ på planet)

b) Obs att speglingen fås av



$$\bar{x} - 2(\bar{x} - F(\bar{x}))$$

$$= I\bar{x} - 2I\bar{x} + 2A\bar{x} =$$

$$= (2A - I)\bar{x}.$$

c) Om A har egenv. λ och egenvektor $\bar{v}$, är

$$(nA - I)\bar{v} = (n\lambda - 1)\bar{v},$$

dvs $nA - I$ har egenvärde $n\lambda - 1$ och egenvektor $\bar{v}$

För projektionen F har vi egenvärdena 0, 1 med egenvektorn $t\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

och $t\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + s\underline{e}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ resp.,

Så $nA - I$ har egenvärden $n0 - 1 = -1$, egenvekt $t\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

och $n1 - 1 = n - 1$, egenvekt

$$t\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + s\underline{e}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

7. Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+ab \\ 0 & b^3 \end{pmatrix},$$

och om detta ska vara $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

måste $\begin{cases} a+ab+ab^2=1 \\ b^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+ab+ab^2=1 \\ b=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}$ Svar $X = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$