Svar ETE325 Linjär algebra (1)

2021-01-10

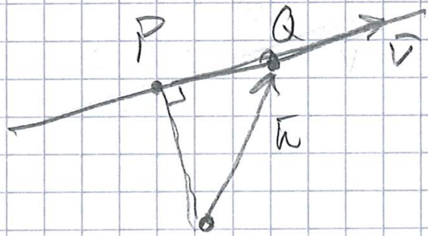
1a)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) 27

c) t.ex $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

2



$$\overline{OP} = \bar{u} - \bar{u}_{//\bar{v}}$$

$$= (1, 1, -1)$$

$$\text{Avst} = |\overline{OP}| = \sqrt{3}$$

3a) $D = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{7} \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ \sqrt{7}-1 & \sqrt{7}+1 \end{pmatrix}$

b) Egenvärden 0 (dubbel) och -2

Egenvektorer $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp. $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

4 a) Se boken

b) $\bar{u} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dvs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

5. a) $s = -1$, $t = -\frac{1}{9}$

b) $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{315}}\begin{pmatrix}-9\\7\\8\\11\end{pmatrix}$

utvidgas med $\bar{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{210}}\begin{pmatrix}-4\\7\\-12\\1\end{pmatrix}$

6 a) $N(F) \cap N(G) = \left[\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right]$

b) $V(F) \cap V(G) = \left[\begin{pmatrix}7\\13\\8\end{pmatrix}\right]$

7. A är symmetrisk med egenvärden -1 och 1 (dubbel). Enligt spektralsatsen finns en ON-bas av egenvekt.

a) Egenvärdena fås ur

$\det(B - \lambda I) = 0$, dvs

$\det\left(\frac{1}{2}(I + A) - \lambda I\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^3}\det(I + A - 2\lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \det(A - (2\lambda - 1)I) = 0$

Denna ekv har endast lösn då

(i) $2\lambda - 1 = -1$, dvs $\lambda = 0$, eller

(ii) $2\lambda - 1 = 1$, dvs $\lambda = 1$ (dubbel)

Så B har egenvärden $0, 1, 1$.

3

b) B är också symmetrisk,

$$B^t = \frac{1}{2}(I+A)^t = \frac{1}{2}(I^t+A^t) = \frac{1}{2}(I+A) = B,$$

med samma egenvektorer som A:

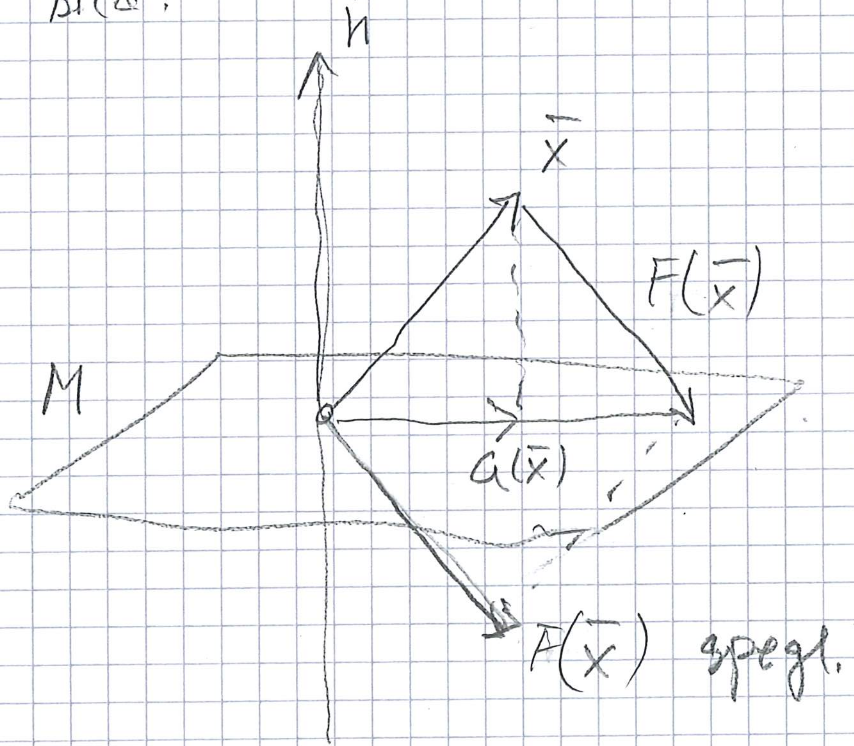
Om $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$,

$$B\bar{v} = \frac{1}{2}(I+A)\bar{v} = \underbrace{\frac{1}{2}(1+\lambda)}_{\text{egenvärde}}\bar{v},$$

Så normalen till planet avb. på $\bar{0}$ och vektorer i planet är opåverkade ($B\bar{v} = \bar{v}$)

Alltså är G en ortog. proj. på planet M.

Bild:



$$G(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{x} + F(\bar{x}))$$
$$= \frac{1}{2}(I\bar{x} + A\bar{x})$$
$$= \frac{1}{2}(I+A)\bar{x}$$