Svar och lösningsförslag

Tentamen ETE325 - 2021-05-28

1.

a) $AX - B = (B-A)X \iff 2AX - BX = B$

$$\iff X = (2A-B)^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

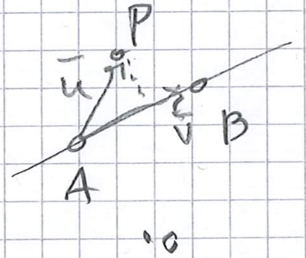
b) $(-1)(-2)$ $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

c) Vektorn $(1,-1,0)$ är ortog. mot $\bar{v} = (1,1,-2)$

och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ är ortog. mot båda

Svar T.ex. $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.



$$\bar{v} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} = \overline{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Proj. av $\bar{u}$ på $\bar{v}$: $\bar{u}_{/\!/\bar{v}} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v} = \frac{-4}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ger Avst $= |\bar{u} - \bar{u}_{/\!/\bar{v}}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{3}}}$

och $\overline{OQ} = \overline{OA} + \bar{u}_{/\!/\bar{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) Arean $= \frac{1}{2}|\bar{u}\times\bar{v}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}}$

3. a) T.ex

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Antag $F(\bar{u}) = \lambda_1 \bar{u}$ och $F(\bar{v}) = \lambda_2 \bar{v}$,

där $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\bar{u}, \bar{v} \neq 0$

Om $\bar{u} = t\bar{v}$ för något $t \neq 0$

är $F(\bar{u}) = F(t\bar{v}) \Leftrightarrow \lambda_1 \bar{u} = t\lambda_2 \bar{v}$,

vilket ger $\lambda_1 t\bar{v} = t\lambda_2 \bar{v}$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \bar{v} = \lambda_2 \bar{v}$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow \quad \bar{v} = \bar{0} \quad , (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

vilket är omöjligt eftersom $\bar{v}$ är en egenvektor.

4.

a) se boken

b) En bas för noll r: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim V(F) = 4 - \dim N(F) = 3$,

så $V(F) = \mathbb{R}^3$, bas $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

c) $N(F)$ bestäms av $AX = 0$

så $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$,

$V(F) = \mathbb{R}^3$, så inga ekv. finns.

5.

a) $A^n = TD^nT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 2\cdot 5^n - 2(-1)^n & 2\cdot 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}$ ③

b) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n \\ 2\cdot 5^n - 2\cdot(-1)^n \end{pmatrix} \quad \left(= A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right)$

6. a) Se boken

b) Se boken

c) U består av alla $(x_1 x_2 x_3 x_4) \in \mathbb{R}^4$ som löser ekv. systemet som kan skrivas

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

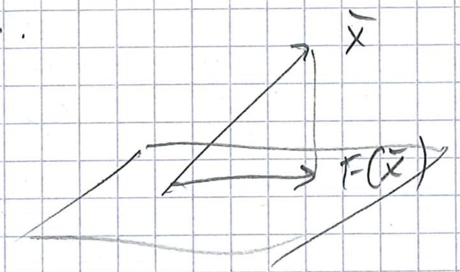
och vi ser att $U_\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$.

Sätt $\bar{f}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Då är $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$, $|\bar{f}_1| = |\bar{f}_2| = 1$,

så en ON-bas för $U_\perp$ är $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$.

7.



$$F(1,0,2) = F(2,1,1)$$

Vi ser att

$$F((1,0,2) - (2,1,1))$$
$$= F(1,0,2) - F(2,1,1) = \bar{0}$$

Så vektorn $(1,0,2) - (2,1,1)$ $= (-1,-1,1)$ är en normal till projektionsplanet som då får ekv. $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Vi projicerar $u = (1,0,2)$ på planet:

$$F(1,0,2) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}}$$