Svar och lösningar
till tentamen ETE325
Linjär algebra 21-08-20.

1

1: a) $AXB + B = A - B \iff AXB = A - 2B$

$\iff X = A^{-1}(A-2B)B^{-1} = B^{-1} - 2A^{-1}$

Med $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

får man

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

så normalekv blir $A^t A X = A^t Y$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

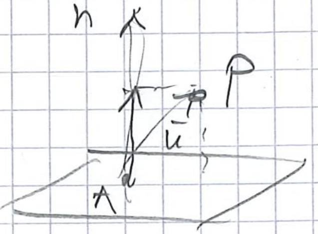
$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$ mk-lösn.

c) Till exempel $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och

$$\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Planet: $x - y + z = 2$



$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{u} = \overline{AP}$, $\bar{u}_{/\!/\bar{n}} =$

Avstånd: $|\bar{u}_{/\!/\bar{n}}| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Spegelbild: $\overline{OP} - 2\,\bar{u}_{/\!/\bar{n}} = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

3. Lösning

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \\ x_2(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

(egenvärden $-1, 6$
egenvekt: t.ex
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$)

4. Se boken

5. Lösningen till systemet ger en bas för U:

$$\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = -s \\ x_4 = -t \end{cases}$$

vilket ger ON-basen $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

En bas för $U_\perp$ ges av koeff. till systemet; och denna bas ger $\bar{f}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ON-bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ för $\mathbb{R}^4$

6. En ellips har i en ON-bas av ③
egenvektorer ekv.

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 \quad , \text{ där } \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

Enl. uppg är egenvektorerna

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ty par. med halvaxlarna.

Så basb.matrisen $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $= T^{-1}$

Ellipsen går genom

$(x_1, x_2) = (1, 0)$ dvs $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och

$(x_1, x_2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ger $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I ekv. ger detta

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} + \lambda_2 \frac{1}{2} = 1 \\ \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Så $\frac{1}{4} y_1^2 + \frac{7}{4} y_2^2 = 1$ är ellipsen

med
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$$

får man slutligen
$$\frac{1}{4\cdot 2}(x_1+x_2)^2 + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 7x_1^2 - 14x_1x_2 + 7x_2^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 + x_2^2 = 1 \; .$$

7. Till exempel
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ger $AX = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad N(F) = \left[\, t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dim N(F) = 1$$

dvs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(F) \cap V(F)$,

så $\dim N(F) \cap V(F) = 1$

ty $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kolonn i A.

(Obs för att hitta A:

Välj två linj. ober. kolonner

t.ex $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

så

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & 1 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix}$$

Välj a, b, c så att t.ex $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

är lösn till $AX = 0$

Så $\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & 1 & b\\ 1 & 1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+1+a = 0 \\ 2+1+b = 0 \\ 1+1+c = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{matrix} a = -2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{matrix}$

Då $\dim V(F) = 2$,

$\dim N(F) = 1$ (dim-satsen $2+1=3$)

och $N(F) \subseteq V(F)$.)