ETE325 Svar
tentamen 220109

1. a) 12

b) ON-bas $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$ (egenvärden 0, 2)

2. Planets ekv. $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

Avb. matris $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Avstånd: $\frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{24}}{3}$

3. a) Se boken

b) Ekv. blir $(A^{-1} - B^{-1})X = I$,

så $X = (A^{-1} - B^{-1})^{-1}$.

Då $A^{-1} - B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

~~blir~~ $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. a) Se boken

b) En ON-bas för U är

t.ex. $\left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{27}}\begin{pmatrix}4\\1\\3\\1\end{pmatrix} \right\}$,

$= \{ \bar{f}_1, \bar{f}_2 \}$

och med $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ får

man

$$\bar{u}_{//U} = (\bar{u}\cdot\bar{f}_1)\bar{f}_1 + (\bar{u}\cdot\bar{f}_2)\bar{f}_2 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 37 \\ 43 \\ 39 \\ 43 \end{pmatrix},$$

så att

$$|\bar{u}_{\perp U}| = |\bar{u} - \bar{u}_{//U}| = \left|\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{702}}{27} = \sqrt{\frac{26}{27}}$$

5. Egenvärdena blir 3 och −3 (dubbel),

och för $\lambda = 3$ får man

egenrummet ur (t.ex): $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$\lambda = -3$ beskrivs av

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

6. A har egenvärden 1, 3, och

i en bas av egenvektorer är

$A = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}T^{-1}$, där T är basb. matrisen $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Sätt $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Då är $A^{-10} = (TDT^{-1})^{-10} = TD^{-10}T^{-1}$

$$= T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{-10} \end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 + 2\cdot 3^{-10} & -1 + 3^{-10} \\ -2 - 3^{-10} & 2 - 3^{-10} \end{pmatrix}$$

7. Tex F med avb. matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ gör

Bas $N(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$V(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$