Lösningsförslag och svar, ETE325, 220530

1a)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Lösningarna är $x = 0$ el $x = 2$ (dubbla rötter)

c) T.ex $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

2. a) Egenvärden $4, 1, -1$ med resp. egenvektorer

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

b) $\det A = -4$ så ej isometri.

3. L skär planet i $(0,-1,-1)$ och riktningsvektorn projiceras på $(2,5,7)$ därför projiceras L på planet till linjen

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 2t \\ x_2 = -1 + 5t \\ x_3 = -1 + 7t, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4a) Lösningen till systemet är (t.ex)

$$\begin{cases} x_1 = -s + t \\ x_2 = -s + 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = t, & s, t \in \mathbb{R} \end{cases},$$

så

$$\left\{ \underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

är en bas för U. Koefficienterna i systemet bildar en bas för $U^\perp$, eftersom de är ortog. mot basen ovan och linjärt ober. (ej parallella) av varandra.

Så en bas för $\mathbb{R}^4$ blir (t.ex)

$$\left\{ \underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

b) T. ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ eftersom

det givna systemet kan skrivas $AX = 0$.

c) T. ex

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ eftersom

kolonnvektorerna i B genererar $V(a)$.

5. Kurvan är en hyperbel

$$\frac{y_1^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1 \quad \text{(i en ON-bas av egenvektorer)}$$

med minsta avstånd $\sqrt{\frac{2}{3}}$ till origo i punkterna $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

största avstånd saknas.

6. Alla vektorer i $U^\perp$ uppfyller

$$2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = r - t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t, \quad r,s,t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

så en bas för $\mathbb{R}^4$ är

$$\left\{ \underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\2\end{pmatrix} \right\}.$$

Gram-Schmidt (på sista vektorn) ger sedan ON-basen

$$\left\{ \frac{1}{3}\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{e}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}}\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\4\end{pmatrix} \right\}$$

b) U är ortog. komplementet till $U^\perp$ så U består av lösn. till

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

7. Varje vektor (matris) i U kan skrivas

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

och matriserna i HL är linjärt oberoende, ~~och de~~ De bildar en bas för U, $\dim U = 5$.

a) U är ett vektorrum ty

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g & h \\ g & i & j \\ h & j & -f-i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+f & b+g & c+h \\ b+g & d+i & e+j \\ c+h & e+j & -a-d-f-i \end{pmatrix} \in U$$

och

$$t\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix} \in U.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dvs A har koordinaterna $(1, 2, 4, 3, 2)$ i den givna basen.