Svar till tentamen
ETE325 Linjär algebra 220819

1. Normalekvationerna

a/
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ger lösningen $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

b/ Determinanten blir -10

c/ $AXB + AB = A + B \Leftrightarrow X = B^{-1} + A^{-1} - I$,

där $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man får $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

2. Med $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (basbytesmatrisen)

blir $T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 2 & -8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, så

$\bar{e}_1 = \underline{f}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \underline{f}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Egenvärden $\lambda = 1$ med egenrum $x - 2y + z = 0$

$\lambda = -1$ med egenrum $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

Båda egenvärden är $\neq 0$, så F är inverterbar (även A inverterbar)

4. $\begin{cases} x_1(t) = 5e^{6t} + 10e^{-t} \\ x_2(t) = 5e^{6t} - 4e^{-t} \end{cases}$

5.

$$L_1 : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$M : 2x + 3y - 3z = 15$$

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ så L_1 är parallell med M

Avståndet är $\frac{4}{11} \cdot \sqrt{22}$

b) L_1 och L_2 skär ej varandra.

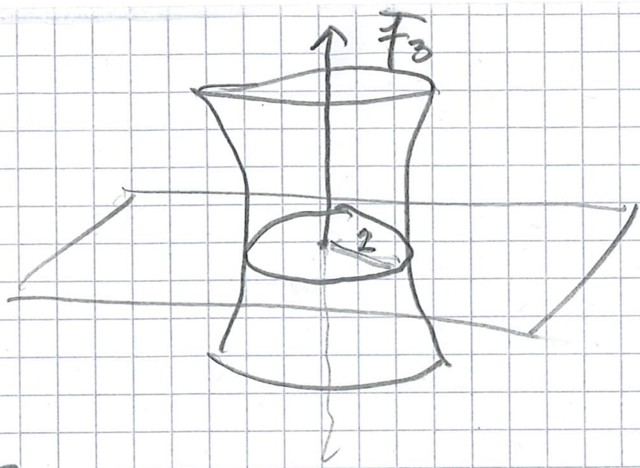
6. Avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ger att i en bas av egenvektorerna blir formen $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, dvs ekvationen

$$\frac{y_1^2}{2^2} + \frac{y_2^2}{2^2} - \frac{y_3^2}{2^2} = 1,$$

vilket beskriver en (enmantlad) hyperboloid.

Inget största avstånd finns, och det minsta avståndet 2 antas på cirkeln $y_1^2 + y_2^2 = 4$, $y_3 = 0$, dvs cirkeln i planet genom origo med $\bar{f}_3$ som normal och radie 2.

Man får $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (egenvärde -1), dvs planet $x_1 + x_2 = 0$



planet $x_1 + x_2 = 0$
(innehåller x_3-axeln)

7. $F(\bar{x}) = \bar{y}$ ger (sammandraget)

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 8 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Man får $N(F) = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$,

$V(F) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$,

och $N(F) \neq \{0\}$ visar att

F ej är inverterbar.