Lösningsförslag

till tentamen på ETE325 den 29 maj 2023 kl 8-13

1. (a) Vi skriver ekvationssystemet på matrisform och radreducerar.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 19 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 19 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Vi inför parametrar $y = s$ och $w = t$ och får
Svar: Alla lösningar ges av $(x, y, z, w) = (2 - 2s - 3t, s, 3 + t, t)$ där $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Ja, om man exempelvis ändrar 4:an längs ned till höger till 0, och radreducerar som ovan så får man i tredje steget på rad 2 respektive 4 de två ekvationerna $-2z + 2w = -6$ och $-2z + 2w = -10$ som motsäger varandra, så då saknar systemet lösningar. **Svar:** Ja.

2. (a) Vi kallar de tre vektorerna i uppgiften u_1, u_2, och u_3. Beroendeekvationen ger $3u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$, så $\mathbb{U} = [u_1, u_2]$ är tvådimensionellt. För att få en ON-bas använder vi Gram-Schmidt och ersätter vi u_2 med

$$u_2' = u_2 - u_{2||u_1} = (2, -1, -1, 1) - \frac{5}{4}(1, -1, -1, 1) = \frac{1}{4}(3, 1, 1, -1).$$

Vi normerar u_1 och u_2' och får att
Svar: $f_1 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$ och $f_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3, 1, 1, -1)$ är en ON-bas för $\mathbb{U}$.

(b) Vi projicerar v på underrummet $\mathbb{U}$, detta blir summan av projektionerna på basvektorerna från vår ON-bas. Vi får

$$v' = v_{||f_1} + v_{||f_2} = \tfrac{-4}{2} f_1 + \tfrac{8}{2\sqrt{3}} f_2 = -(1, -1, -1, 1) + \tfrac{2}{3}(3, 1, 1, -1) = \tfrac{1}{3}(3, 5, 5, -5)$$

så $v'' = v - v' = \frac{1}{3}\big((3, 6, 9, 0) - (3, 5, 5, -5)\big) = \frac{1}{3}(0, 1, 4, 5)$.

Svar: Med $v' = \frac{1}{3}(3, 5, 5, -5)$ och $v'' = \frac{1}{3}(0, 1, 4, 5)$ gäller $v' \in \mathbb{U}$, $v'' \in \mathbb{U}^\perp$, och $v' + v'' = v$.

(Alternativt kan man inse att $u_2 - u_1 = (1, 0, 0, 0)$ och välja detta som sin första basvektor i den sökta ON-basen för U. Då blir all räkning lättare.)

3. (a) C^{-1} existerar precis när $\det(C) \neq 0$, så vi beräknar

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 13x \\ x & x & 2 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 2 - x^2 - x \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = x(x^2 + x - 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x(x+2)(x-1)$$

Svar: Inversen till C existerar för alla x utom $x = 0$, $x = 1$, och $x = -2$.

(b) Vi använder Gauss-Jordan - vi skriver ned matrisen $[C|I]$ och radreducerar till $[I|C^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -2 & -13 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & -13 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & 26 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & 0 & -2 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & 0 & -2 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 13 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 2 & 13 & 17 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Delar vi alla rader med 2 ser vi att

Svar: För $x = -1$ ges matrisens invers av $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 13 & 17 \\ -2 & -13 & -15 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Definitionen: Inversen till en matris A är en matris B som uppfyller $AB = I = BA$.
Att $A^2 + 3A - I = 0$ kan skrivas om som $A(A + 3I) = I = (A + 3I)A$, alltså är A inverterbar enligt definitionen, där inversen ges av $B = A + 3I$.

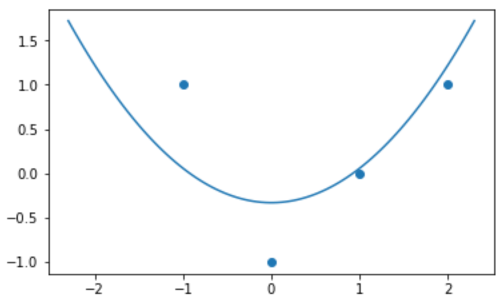
4. Vi sätter in xy-värdena från datapunkterna i ekvationen $y = ax^2 + b$ och får fyra linjära ekvationer i variablerna a och b. Detta ekvationssystem blir på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y$$

Systemet saknar lösningar, men dess *minstakvadratlösning* är per definition lösningen X till $A^tAX = A^tY$, vi beräknar matriserna A^tA och A^tY och får systemet

$$\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Så den sökta kurvan har ekvation $y = \frac{7}{18}x^2 - \frac{1}{3}$. När vi ritar kurvan noterar vi att $y(0) = -\frac{1}{3}$, $y(\pm 1) = \frac{1}{18}$, och $y(\pm 2) = \frac{11}{9}$ vilket hjälper oss rita punkterna på rätt sida kurvan.



(Notera att vår familj andragradskurvor $y = ax^2 + b$ är centrerade kring y-axeln, vi hade fått en bättre uppskattning om vi tillåtit godtyckliga andragradskurvor $y = ax^2 + bx + c$)

5. (a) Med $n = (1, -1, 3)$ som planets normalvektor gäller $F(v) = v - 2v_{||n}$. En godtycklig vektor (x, y, z) avbildas därför på $F(x, y, z) =$

$$(x,y,z) - 2\frac{(x-y+3z)}{11}(1,-1,3) = (9x+2y-6z, 2x+9y+6z, -6x+6y-7z),$$

härur utläser vi att

Svar: Avbildningens matris i standardbasen är $[F] = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

(Alternativt kan man undersöka vart standardbasvektorerna avbildas och skriva dessa bilder som kolonner i matrisen. Man kan också lösa uppgiften med basbyte, men det blir tidskrävande.)

(b) Vi har $G(v) = v - F(v) = v - (v - 2v_{||n}) = 2v_{||n}$, härur utläser vi direkt den geometriska innebörden av G och dess egenvärden och egenvektorer:
Svar: Avbildningen G projicerar rummets vektorer ortogonalt på linjen $t(1, -1, 3)$ och sträcker därefter vektorerna med en faktor 2, nollskilda vektorer i planet $x - y + 3z = 0$ är egenvektorer med egenvärde 0, och nollkilda vektorer på linjen $t(1, -1, 3)$ är egenvektorer med egenvärde 2.

(Alternativt kan man börja med att undersöka egenvärden och egenvektorer till G, direkt från definitionen ser man att om v tillhör planet $x - y + 3z = 0$ gäller $G(v) = v - F(v) = v - v = 0$, och om $v||(1, -1, 3)$ så gäller $G(v) = v - F(v) = v - (-v) = 2v$, ur vilket man kan dra samma slutsats. Egenvärden och egenvektorer kan annars undersökas via matrisen för G, men detta blir mycket mer jobb.)

6. Systemet kan skrivas $X' = AX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Vi tar fram egenvärden och egenvektorer till A. Sekularpolynomet blir

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 4 & -7-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -7-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 5-\lambda \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 4) + (6\lambda - 6)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Så egenvärdena är $\lambda = -1, 1, 2$. Vi tar nu fram egenvektorer och väljer en egenvektor v_λ ur vart egenrum $N(A - \lambda I)$. För $\lambda = -1$ fås ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

För $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right], \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

För $\lambda = 2$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi inför nya variabler enligt $X = TY$, alltså med

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = X = TY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

så gäller $A = TDT^{-1}$ och alltså är $X' = AX = TDT^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY$ vars lösningar är $(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = (C_1e^{-t}, C_2e^t, C_3e^{2t})$ för alla $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Alltså är

$$X = TY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(C_1e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= C_1e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Detta är alltså den allmänna lösningen till systemet.

Vi söker nu den lösning som uppfyller $X(0) = (3, 2, -1)^t$. Vi tar $t = 0$ i den allmänna lösningen ovan och får ett linjärt system i variablerna C_1, C_2, C_3:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ur vilket vi utläser att $(C_1, C_2, C_3) = (2, 0, 1)$. Vi sammanfattar:
Svar: Systemets allmänna lösning är

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den lösning som uppfyller det givna begynnelsevillkoret är

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = 2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} \\ 2e^{-t} \\ -2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

7. Ekvationen för diskokulans yta är $x^2+y^2+(z-33)^2 = 9$. Vi stoppar in en godtycklig punkt $(x, y, z) = (4-t, 6-2t, 32)$ på strålen för att hitta punkten P där strålen träffar kulan. Vi får $(4-t)^2 + (6-2t)^2 + (-1)^2 = 9 \Leftrightarrow 5t^2 - 32t + 44 = 0$. Vi delar med 5 och kvadratkompletterar vänsterledet:

$$t^2 - \tfrac{32t}{5} + \tfrac{44}{5} = (t - \tfrac{16}{5})^2 - \tfrac{256}{25} + \tfrac{220}{25} = (t - \tfrac{16}{5})^2 - (\tfrac{6}{5})^2 = (t-2)(t - \tfrac{22}{5}).$$

Eftersom t är tiden i någon enhet träffar strålen kulan när $t = 2$, det minsta t-värdet som löser ekvationen. Alltså blir skärningspunkten $P = (2, 2, 32)$.

Vektorn $n = (2, 2, -1)$ pekar från kulans centrum till punkten P. Alltså ges normalplanet till kulan i pukten P av $2x + 2y - z = d$ (för någon konstant d som vi inte behöver beräkna). Strålens ursprungliga riktning är $v = (-1, -2, 0)$, så den reflekterade strålens riktning blir

$$v' = v - 2v_{||n} = (-1, -2, 0) - 2\frac{-6}{9}(2, 2, -1) = \frac{1}{3}\big((-3, -6, 0) + (8, 8, -4)\big) = \frac{1}{3}(5, 2, -4),$$

Så den reflekterade strålen har riktning v' och går genom P, den kan då skrivas

$$(x, y, z) = P + t(3v') = (2 + 5t, 2 + 2t, 32 - 4t).$$

Sätter vi $z = 0$ här får vi $t = 8$, och
Svar: Strålen träffar golvet i punkten $(42, 18, 0)$.