Lösningsförslag - ETE325/TEN1 - 2023-08-18

1. Vi löser ekvationen algebraiskt:

$$XA = A^t - 3X \Leftrightarrow XA + 3XI = A^t \Leftrightarrow X(A+3I) = A^t \Leftrightarrow X = A^t(A+3I)^{-1}$$

förutsatt att inversen ovan existerar vilket den gör eftersom

$$(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

så

$$X = A^t(A+3I)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är den enda lösningen.

2. En vektor mellan punkterna på ℓ_1 är $(3,3,3)$, så ℓ_1 är parallell med $(1,1,1)$. ℓ_2 är vinkelrät mot båda planens normalvektorer, så ℓ_2 är parallell med $(1,-1,1) \times (2,1,1) = (-2,1,3)$. Vi bildar nu kryssprodukten mellan linjernas riktningsvektorer och får en vektor $n = (1,1,1) \times (-2,1,3) = (2,-5,3)$ som är vinkelrät mot båda linjerna. Vi väljer nu en punkt på var linje, på ℓ_1 väljer vi $P_1 = (1,2,3)$, och för att hitta en punkt på ℓ_2 söker vi en av lösningarna till

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x \phantom{{}-y} + 2z = 4 \end{cases}$$

så om vi exempelvis tar $x = 0$ får vi $z = 2$ och $y = -1$ så $P_2 = (0,-1,2)$ ligger på ℓ_2. Nu går $\overline{P_2P_1} = (1,3,1)$ mellan linjerna, så den sökta längen är längden av projektionen av $(1,3,1)$ på riktningen $n = (2,-5,3)$. Avståndet blir $|(1,3,1)|_{(2,-5,3)}| = |\frac{-10}{38}(2,-5,3)| = \frac{10}{38}|(2,-5,3)| = \frac{10}{38}\sqrt{38} = \frac{5}{19}\sqrt{38}$.
Svar: Avståndet mellan linjerna är $\frac{5}{19}\sqrt{38}$.

3. Vi noterar att vektorerna $(1,-1,0,0)$ och $(0,0,1,-1)$ både är vinkelräta mot varandra och mot $(1,1,1,1)$. Vi söker en fjärde basvektor som är vinkelrät mot de tre vektorerna $(1,1,1,1)$, $(1,-1,0,0)$, och $(0,0,1,-1)$, en vektor (x,y,z,w) är vinkelrät mot dessa tre när ekvationssystemet nedan håller:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y \phantom{{}+z+w} = 0 \\ \phantom{x+y+{}} z - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phantom{x-{}} y \phantom{{}+z} + w = 0 \\ x - y \phantom{{}+z+w} = 0 \\ \phantom{x+y+{}} z - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \\ w = -t \end{cases}$$

så vi har exempelvis $(1,1,-1,-1)$ som en lösning. Vi har nu hittat fyra parvis vinkelräta vektorer där den första är parallell med $(1,1,1,1)$, så vi normerar och får
Svar: Basen $f_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$,$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $f_4 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$ uppfyller villkoren (flera andra svar är möjliga).
Eftersom basen ovan är en ON-bas gäller det att de nya koordinaterna ges av $x_i = f_i \bullet (1,2,3,4)$, vilket ger $x_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \bullet (1,2,3,4) = 5$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0) \bullet (1,2,3,4) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1) \bullet (1,2,3,4) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $x_4 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1) \bullet (1,2,3,4) = -2$.
Svar: Vektorn $(1,2,3,4)$ har koordinaterna $(5, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, -2)$ i basen $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

4. (a) Om V är ett euklidiskt rum, så kallas en avbildning $F : V \to V$ *isometrisk* om $|F(v)| = |v|$ för alla $v \in V$. Alternativt kan detta uttryckas som att $(F(v)|F(v)) = (v|v)$ för alla $v \in V$.

(b) Kalla matrisen A. Vi noterar att kolonnerna i A är parvis vinkelräta och har längden 1, alltså utgör de en ON-bas för $\mathbb{R}^3$, och därför är avbildningen en isometri. Isometrier på $\mathbb{R}^3$ är antingen vridningar eller vridspeglingar. Matrisens determinant är

$$\frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(1-4) = 1$$

vilket visar att avbildningen är en vridning. För att beskriva avbildningen fullständigt behöver vi ange vridningsaxel, vridningsvinkel, och orientering på vridningen (medurs/moturs). En vektor X i vridningsaxelns riktning kommer att uppfylla $AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow (3A - 3I)X = 0$. Detta system har heltalskoefficienter och är lätt att lösa:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

vilket ger att $X = t(1, 1, 0)$ är vridningsaxeln. För att ta fram vridningsvinkeln väljer vi en vektor $v = (0, 0, 1)$ vinkelrät mot vridningsaxeln, då är vridningsvinkeln vinkeln mellan v och $Av = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$. Vi har alltså $\cos(\theta) = \frac{v \bullet Av}{|v| \cdot |Av|} = \frac{\frac{1}{3}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{3}$ så $\theta = \arccos(\frac{1}{3})$.

För att ta reda på orientering beräknar vi determinanten med kolonner $v, 3Av, n$ där $n = (1, 1, 0)$ är vridningsaxelns riktning (3:an för att göra räkningen lättare). Vi får

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

alltså är vektorerna $v, 3Av, n$ negativt orienterade vilket betyder att minsta vridningen som överför v på Av sker *medurs* sett från $(1, 1, 0)$.

Svar: Avbildningen är en vridning kring axeln $(1, 1, 0)$ med en vinkel $\theta = \arccos(\frac{1}{3})$ och vridningen sker medurs sett från punkten $(1, 1, 0)$.

5. (a) Låt $x_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. Då har vi $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och rekursionssambandet kan skrivas

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = Ax_n.$$

Alltså får vi $x_n = A^n x_0$ där A är 2×2-matrisen ovan. Vi tar nu fram egenvärden och egenvektorer till A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = (\lambda - \tfrac{1}{2})(\lambda - \tfrac{3}{2})$$

så egenvärdena är $\frac{1}{2}$ och $\frac{3}{2}$. Räkning visar att vektorn $\binom{1}{2}$ är en egenvektor med egenvärde $\frac{1}{2}$ och att vektorn $\binom{3}{2}$ är en egenvektor med egenvärde $\frac{3}{2}$. Vi uttrycker nu $x_0 = \binom{1}{1}$ som en linjärkombination av egenvektorerna och får $x_0 = \frac{1}{4}\binom{1}{2} + \frac{1}{4}\binom{3}{2}$. Nu får vi

$$x_n = A^n x_0 = \tfrac{1}{4}A^n\big(\tbinom{1}{2} + \tbinom{3}{2}\big) = \tfrac{1}{4}\big(A^n\tbinom{1}{2} + A^n\tbinom{3}{2}\big) = \tfrac{1}{4}\big((\tfrac{1}{2})^n\tbinom{1}{2} + (\tfrac{3}{2})^n\tbinom{3}{2}\big).$$

Eftersom a_n är andra koordinaten i x_n så har vi

$$a_n = \tfrac{1}{4}\big(2(\tfrac{1}{2})^n + 2(\tfrac{3}{2})^n\big) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2^n} + \tfrac{3^n}{2^n}\big) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1+3^n}{2^n}\big) = \tfrac{1+3^n}{2^{n+1}}.$$

Svar: Den explicita formen kan skrivas $a_n = \frac{1+3^n}{2^{n+1}}$ för $n \geq 0$.

(b) Om vårt nya x_0 uttrycks som $s\binom{1}{2} + t\binom{3}{2}$ som linjärkombination egenvektorerna får vi fortfarande $x_n = s(\frac{1}{2})^n\binom{1}{2} + t(\frac{3}{2})^n\binom{3}{2}$. Eftersom $|\frac{3}{2}| > 1$ och $|\frac{1}{2}| < 1$ så måste $t = 0$, men s kan vara vilket tal som helst för att vi ska ha $a_n \to 0$ då $n \to \infty$. Alltså måste vi ha $x_0 = \binom{a_1}{a_0} = s\binom{1}{2}$ och eftersom $a_0 = 1$ måste vi ta $s = \frac{1}{2}$ och får då $a_1 = \frac{1}{2}$.
Svar: Ja det går, enda möjliga valet är $a_1 = \frac{1}{2}$.

6. Vi inför en kvadratisk form $Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 2x_2^2 + 12x_1x_2$, vilken kan skrivas på matrisform som

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi kallar den kvadratiska matrisen A och söker dess egenvärden och egenvektorer:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 50 = (\lambda - 10)(\lambda + 5),$$

så egenvärdena är -5 och 10 vilket ger signatur $(1, -1)$ och kurvan är en hyperbel. Vi tar fram egenvektorer till A, för egenvärde -5 fås

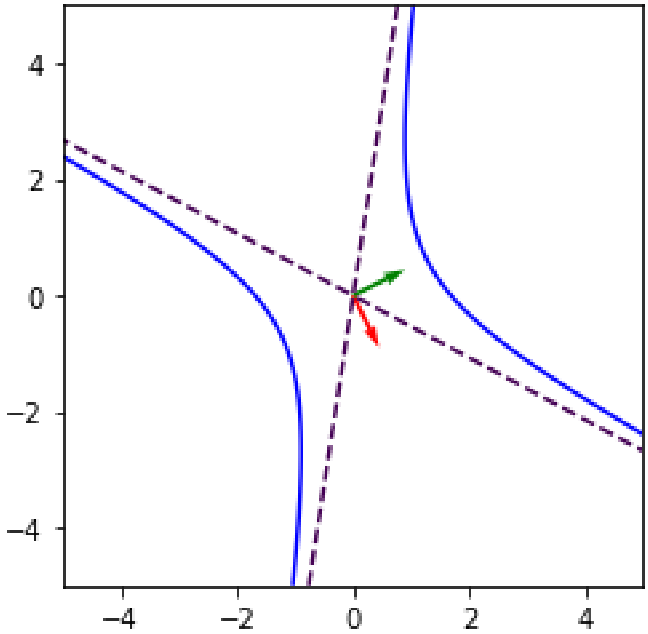
$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

så $f_{-5} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$ är en normerad egenvektor med egenvärde -5, och eftersom A är symmetrisk måste egenriktningen till egenvärdet 10 vara vinkelrät mot föregående egenvektor, så $f_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ är en normerad egenvektor till egenvärdet 10.

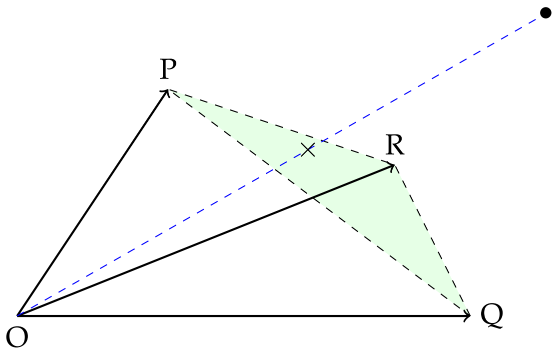
Vi har $Q(v) \leq \lambda_{\max}|v|^2$ med likhet för de v på kurvan i egenrummet till $\lambda = 10$ vilket för oss ger $20 \leq 10|v|^2$, och $|v|^2 \geq 2$ så $|v| \geq \sqrt{2}$ med likhet då $v = t(2, 1)$ och ligger på kurvan. Så punkterna på hyperbeln närmast origo är $\pm\sqrt{2} \cdot f_{10} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(2, 1)$. I basen (f_{-5}, f_{10}) blir ekvationen för hyperbeln $-5y_1^2 + 10y_2^2 = 20$. För att hitta kurvans asymptoter sätter vi högerledet till 0 och löser ekvationen $-5y_1^2 + 10y_2^2 = 0 \Leftrightarrow y_1^2 = 2y_2^2 \Leftrightarrow y_1 = \pm\sqrt{2}y_2$, så asymptoterna pekar i riktnignarna $(\sqrt{2}, 1)$ respektive $(\sqrt{2}, -1)$ i nya koordinater, vilket ger riktningarna $\sqrt{2}(1, -2) \pm (2, 1)$ alltså riktningarna $(2+\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2}) \simeq (3.4, -1.8)$ respektive $(-2+\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2}) \simeq (-0.6, -3.8)$ i den ursprungliga basen.

Vi sammanfattar och ritar en figur där vi tar med all relevant information.
Svar: Kurvan beskriver en hyperbel, som i basen $(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1))$ har ekvation $-y_1^2 + 2y_2^2 = 4$. Punkterna närmast origo är $\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(2, 1)$ och asymptoterna ligger längs

riktningarna $(2+\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$ respektive $(-2+\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2})$.



7. Vi inför ett nytt koordinatsystem där origo ges av $O = (1, 0, 0)$ (där kulan avfyras från) och där basvektorerna är $f_1 = \overline{OP} = (4, 0, 2)$, $f_2 = \overline{OQ} = (-4, -3, -2)$, $f_3 = \overline{OR} = (1, 1, 1)$. Vi uttrycker kulans riktning $v = (1, 1, 2)$ i vår nya bas och får $v = \frac{1}{6}(1, 4, 18)$. I det nya koordinatsystemet beskrivs kulans väg därför av $t(1, 4, 18)$, och eftersom alla koordinaterna är positiva ligger $(1, 4, 18)$ i första oktanten i det nya koordinatsystemet - därför träffar kulan triangeln. Principskiss:



Svar: Ja, kulan passerar genom triangeln.