

**Linköpings Universitet**  
**Övningstenta på kursen ETE325: Linjär algebra VT2023**  
**Examinator: Jonathan Nilsson**

Inga hjälpmedel är tillåtna. Tentamen har sju uppgifter där var och en är värd 3p. Maxpoäng är 21p. För betyg 3/4/5 krävs minst 10/14/18 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifterna). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida och lämna in uppgifterna i nummerordning. Skriv inte med rödpenna. Ett lösningsförslag publiceras på kurshemsidan ett par timmar efter ordinarie skrivtid är slut.

Alla koordinatvektorer och avbildningsmatriser får antas vara angivna relativt en ON-bas i  $\mathbb{R}^n$  om inget annat anges.

1. Hitta alla lösningar till determinantekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 1 \\ 2 & x & -3 & 1 \\ 1 & x & 1 & x \\ x & 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Låt  $\ell : (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 1 + 2t)$  och låt  $\pi : x + 2y + 3z = -7$ . Ta fram en parameterform för den linje  $\ell'$  som ligger i planet  $\pi$  och som skär linjen  $\ell$  vinkelrätt.

3. En linjär avbildning  $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ges av avbildningsmatrisen

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Ta fram en ON-bas för värderummet  $V(F)$   
(b) Ta fram en ON-bas för nollrummet  $N(F)$   
(c) Vad säger dimensionssatsen? Verifiera att den gäller för avbildningen  $F$ .
4. Ange den kurva på form  $ax^2 + by^2 = 1$  som i minstakvadratmening ligger närmast de fyra punkterna  $(0, -1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ , och  $(-1, 1)$  i  $xy$ -planet. Kurvan du får fram är en ellips, ange dess halvaxlar och skissa kurvan tillsammans med de fyra punkterna i samma koordinatsystem.
5. Ta fram avbildningsmatrisen för den linjära avbildning  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som först speglar planets vektorer i linjen  $y = 2x$  och sedan roterar vektorerna medurs en kvarts varv. Beskriv också den sammansatta avbildningen  $F$  geometriskt på ett så enkelt sätt som möjligt.
6. Ange vilken typ av yta som beskrivs av ekvationen  $4xy + 4xz - y^2 + z^2 = 12$ . Ange också de punkter på ytan som ligger närmast origo.
7. Låt  $M_3$  vara vektorrummet av  $3 \times 3$ -matriser, och låt  $R : M_3 \rightarrow M_3$  vara den linjära avbildning som roterar matriser en kvarts varv medurs:

$$R\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{bmatrix}.$$

Ange alla egenvärden och egenvektorer för  $R$ , och avgör om  $R$  är diagonaliserbar.

*Lycka till!*